

PROBLEMA 5.53

**Molle multiple \*\***

Una massa  $m$  si muove nello spazio ed è collegata ad un estremo di  $N$  molle di lunghezza a riposo nulla.

La costante elastica della molla  $j$ -sima è  $k_j$ , e l'altro estremo è fissato ad un punto  $\vec{r}_j$ , fisso nello spazio.

Mostrare che il sistema è equivalente ad una massa  $m$  collegata ad un'unica molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla, fissata ad un punto  $\vec{r}$ . Calcolare  $k$  e  $\vec{r}$ .

**Soluzione**

L'energia potenziale totale del sistema è data dalla somma delle energie potenziali di ciascuna molla

$$U(\vec{r}) = \sum_i \frac{k_i}{2} |\vec{r} - \vec{r}_i|^2$$

e sviluppando i calcoli otteniamo

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= \sum_i \frac{k_i}{2} \vec{r} \cdot \vec{r} + \sum_i \frac{k_i}{2} \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i - \sum_i \frac{k_i}{2} 2\vec{r} \cdot \vec{r}_i \\ &= \frac{1}{2} \left( \vec{r} \cdot \vec{r} \sum_i k_i + \sum_i k_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i - 2\vec{r} \cdot \sum_i k_i \vec{r}_i \right) \end{aligned}$$

e introducendo

$$k = \sum_i k_i$$

$$\vec{R} = \frac{\sum_i k_i \vec{r}_i}{\sum_i k_i}$$

possiamo scrivere

$$U(\vec{r}) = \frac{k}{2} \left( \vec{r} \cdot \vec{r} - 2\vec{r} \cdot \vec{R} + \vec{R} \cdot \vec{R} \right) + \frac{1}{2} \left( \sum_i k_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i - \vec{R} \cdot \vec{R} \right)$$

Il secondo membro è una costante irrilevante, il primo l'energia potenziale di una molla equivalente, di costante  $k$  e fissata in  $\vec{R}$

$$U(\vec{r}) = \frac{k}{2} |\vec{r} - \vec{R}|^2$$