PROBLEMA 5.55

Catena di oscillatori ⋆⋆⋆

Si vuole modellare una molla di lunghezza ℓ, massa m e costante elastica K con una catena di N masse μ unite da $N-1$ molle di costante elastica χ, come in Figura 5.43. Studiate le oscillazioni di questo sistema se le masse agli estremi sono bloccate.

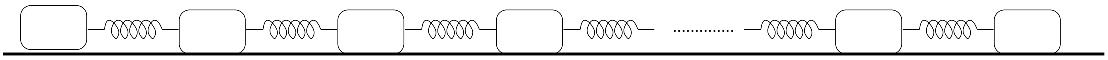

Figura 5.43.: La catena di oscillatori considerata nell'esercizio.

Soluzione

Detta x_k la coordinata della k-sima massa riferita alla sua posizione di equilibrio abbiamo le equazioni del moto per le masse intermedie della forma

$$\mu\ddot{x}_k = \chi(x_{k-1} + x_{k+1} - 2x_k)$$

dove imponendo che la massa totale sia m abbiamo chiaramente $\mu N = m$, mentre per la costante elastica deve valere $K^{-1} = (N-1)\chi^{-1}$. Per le masse agli estremi abbiamo le equazioni modificate

$$x_1 = x_N = 0$$

Utilizziamo direttamente le equazioni del moto cercando soluzioni del tipo

$$x_k(t) = u_\alpha(t)e^{i\alpha k}$$

e sostituendo nelle equazioni per le masse intermedie abbiamo

$$\mu e^{i\alpha k}\ddot{u}_\alpha + \chi\left(2 - e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}\right)e^{i\alpha k}u_\alpha = 0$$

ossia

$$\ddot{u}_\alpha + \frac{4\chi}{\mu}\sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right)u_\alpha = 0$$

Questa è l'equazione di un oscillatore con

$$\omega_\alpha = 2\sqrt{\frac{\chi}{\mu}}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$$

e tutti i valori reali di α sono permessi. Dobbiamo però tenere ancora conto delle equazioni per le masse agli estremi. Queste danno le condizioni

$$u_\alpha e^{i\alpha} = 0$$
$$u_\alpha e^{iN\alpha} = 0$$

che non possono però essere soddisfatte qualunque sia il valore di α. Possiamo però sovrapporre soluzioni corrispondenti a $\pm\alpha$, che oscillano nel tempo con la stessa frequenza. La nostra soluzione sarà quindi del tipo

$$x_k(t) = \left(Ae^{i\alpha k} + Be^{-i\alpha k}\right) u_\alpha(t)$$

e le condizioni per gli estremi diventano

$$\begin{aligned} Ae^{i\alpha} + Be^{-i\alpha} &= 0 \\ Ae^{i\alpha N} + Be^{-i\alpha N} &= 0 \end{aligned}$$

Questo sistema lineare omogeneo ammette soluzioni non banali solo se

$$\sin\alpha(N-1) = 0$$

ossia quando

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{(N-1)}$$

con m intero. Si hanno N soluzioni indipendenti per $m = 0, \cdots, N-1$ che si scriveranno

$$x_k^{(m)}(t) = u_{\alpha_m}(t) \left(e^{i\alpha_m(k-1)k} - e^{-i\alpha_m(k-1)}\right)$$

ossia

$$x_k^{(m)}(t) = A_m \sin\left[\alpha_m(k-1)\right] \cos\left(\omega_{\alpha_m} t + \varphi\right)$$