PROBLEMA 5.59

Urti e attrito ⋆⋆⋆

La pedana in Figura 5.47 di massa M è poggiata su un piano orizzontale con attrito, coefficienti μ_s e μ_d. La particella di massa $m < M$ si muove al suo interno, in assenza di attrito, con velocità iniziale v_0 rimbalzando elasticamente sulle pareti. Calcolare lo spostamento totale della pedana per $t \to \infty$. Si può considerare la separazione tra le due pareti grande a piacere. Cosa succede per $m > M$?

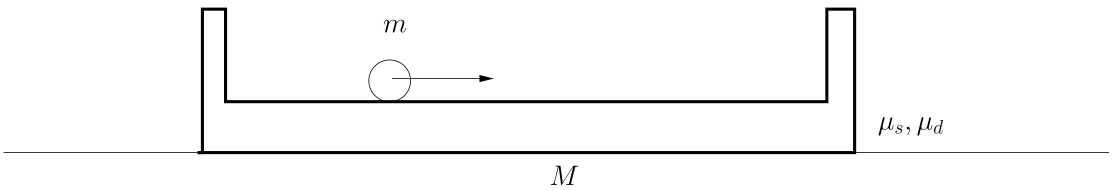

Figura 5.47.: Il sistema considerato nell'esercizio.

Soluzione

Studiamo il singolo urto. Dato che la separazione tra le due pareti è grande possiamo considerare la pedana ferma, dato che l'energia acquistata nell'urto precedente è stata dissipata. Allora immediatamente dopo l'urto avremo le velocità

$$v = \frac{m-M}{m+M}v_0$$

e

$$V = \frac{2m}{m+M}v_0$$

L'energia cinetica della pedana sarà tutta dissipata in attrito, per cui questa percorrerà un tratto Δ determinato da

$$\frac{1}{2}MV^2 = \mu_d(m+M)g\Delta$$

cioè

$$\Delta = \frac{2Mm^2}{\mu_d g(m+M)^3}v_0^2$$

Tutto questo si ripeterà ad ogni urto, ogni volta con la velocità della particella ridotta di un fattore e lo spostamento cambiato di segno, cioè

$$v_n = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)^n v_0$$

e

$$\Delta_n = (-1)^n \frac{2Mm^2}{\mu_d g(m+M)^3}v_n^2 = (-1)^n \frac{2Mm^2 v_0^2}{\mu_d g(m+M)^3}\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^{2n}.$$

Lo spostamento totale si trova sommando la serie geometrica

$$L = \frac{2Mm^2v_0^2}{\mu_d g(m+M)^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2\right]^n = \frac{2Mm^2v_0^2}{\mu_d g(m+M)^3}\frac{1}{1+\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2}$$

ossia

$$L = \frac{Mm}{(m+M)}\frac{m}{m^2+M^2}\frac{v_0^2}{\mu_d g}$$

Se $m > M$ la massa non inverte il proprio moto dopo l'urto, e anche i successivi avverranno dalla stessa parte. Quindi tutta l'energia viene dissipata da spostamenti della pedana nello stesso verso, e quindi

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu_d(M+m)gL$$

da cui

$$L = \frac{mv_0^2}{2\mu_d(m+M)g}$$

Questa espressione coincide con la precedente per $m = M$.