PROBLEMA 5.5

Moto periodico ⋆⋆

Una particella di massa m è vincolata a muoversi su un piano inclinato di lunghezza ℓ, come rappresentato in Figura 5.4. Ai due estremi del piano è posta una barriera su cui la particella rimbalza, senza modificare il modulo della propria velocità. Se v_0 è la velocità nel punto più basso determinare il periodo del moto periodico. Studiare in particolare cosa accade per grandi valori della velocità v_0.

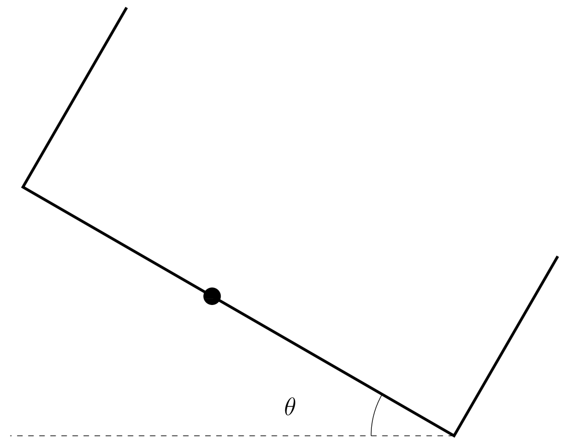

Figura 5.4.: Figura per il problema.

Soluzione

Il moto sul piano inclinato è uniformemente accelerato, con accelerazione $a = g \sin\theta$. Il periodo sarà il doppio del tempo necessario per spostarsi dal punto più basso al punto più alto. Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} s(t) &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \sin\theta \\ v(t) &= v_0 - g t \sin\theta \,. \end{aligned}$$

La velocità si annulla al tempo

$$t' = \frac{v_0}{g \sin\theta}$$

e lo spazio percorso a tale istante vale

$$s' = s(t') = \frac{v_0^2}{2g\sin\theta} \,.$$

Occorre distinguere due casi. Se $s' < \ell$ la particella non arriva mai alla barriera superiore, e quindi il periodo è semplicemente

$$T = 2t' = \frac{2v_0}{g\sin\theta} \,.$$

Questo accade se per il modulo della velocità iniziale vale

$$v_0 < \sqrt{2g\ell \sin\theta}\,.$$

Invece se $s' > \ell$ l'urto con la barriera superiore avviene quando $s(t_u) = \ell$, cioè

$$v_0 t_u - \frac{1}{2} g t_u^2 \sin\theta = \ell$$

che significa

$$g t_u^2 \sin\theta - 2 v_0 t_u + 2\ell = 0$$

$$t_u = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2\ell g \sin\theta}}{g \sin\theta}\,.$$

Entrambe le soluzioni sono positive, ma solo la minore è accettabile. L'altra corrisponde al tempo in cui la particella, avendo superato la barriera, è tornata su di essa dopo aver invertito il moto. Chiaramente $T = 2t_u$. Notare che quando $v_0 \gg \ell g \sin\theta$ le due soluzioni si comportano in modo molto diverso. Quella non accettabile diviene molto grande (il moto si inverte a un tempo sempre maggiore)

$$\frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2\ell g \sin\theta}}{g \sin\theta} \simeq \frac{2 v_0}{g \sin\theta}$$

l'altra tende al tempo necessario a percorrere il tratto ℓ con velocità costante

$$\frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2\ell g \sin\theta}}{g \sin\theta} \simeq \frac{\ell}{v_0}$$

il che significa che se la velocità iniziale è molto grande gli effetti dell'accelerazione sono trascurabili.