PROBLEMA 5.62

Campo di forze III ⋆⋆

Mostrare che un campo centrale nel piano della forma

$$\vec{F} = f(r,\theta)\vec{r}$$

è conservativo se e solo se la funzione f non dipende da θ.

Soluzione

Supponiamo

$$\vec{F} = f(r)\vec{r} \tag{5.62.1}$$

e mostriamo che il campo è conservativo. Dovrà essere

$$F_x = f(r)x = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{5.62.2}$$

$$F_y = f(r)y = -\frac{\partial U}{\partial y} \tag{5.62.3}$$

Questo è possibile prendendo

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} u f(u) du \tag{5.62.4}$$

come si verifica direttamente:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = r f(r)\frac{x}{r} \tag{5.62.5}$$

e similmente per y.

Mostriamo adesso che se f dipende da θ il campo non può essere conservativo. Se per assurdo lo fosse, il lavoro del campo di forze su un qualsiasi percorso chiuso dovrebbe essere nullo. Ma considerando il percorso in Figura 5.48 questo significherebbe che la quantità

$$L_{r_1\to r_2}(\theta) = \int_{r_1}^{r_2} f(r,\theta)\, r\, dr \tag{5.62.6}$$

deve essere indipendente da θ, dato che

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{x} = L_{r_1\to r_2}(\theta_1) - L_{r_1\to r_2}(\theta_2)\,. \tag{5.62.7}$$

Questo significa che per r_1 e r_2 arbitrari deve essere

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial f(r,\theta)}{\partial\theta}\, r\, dr = 0 \tag{5.62.8}$$

cioè

$$\frac{\partial f(r,\theta)}{\partial\theta} = 0$$

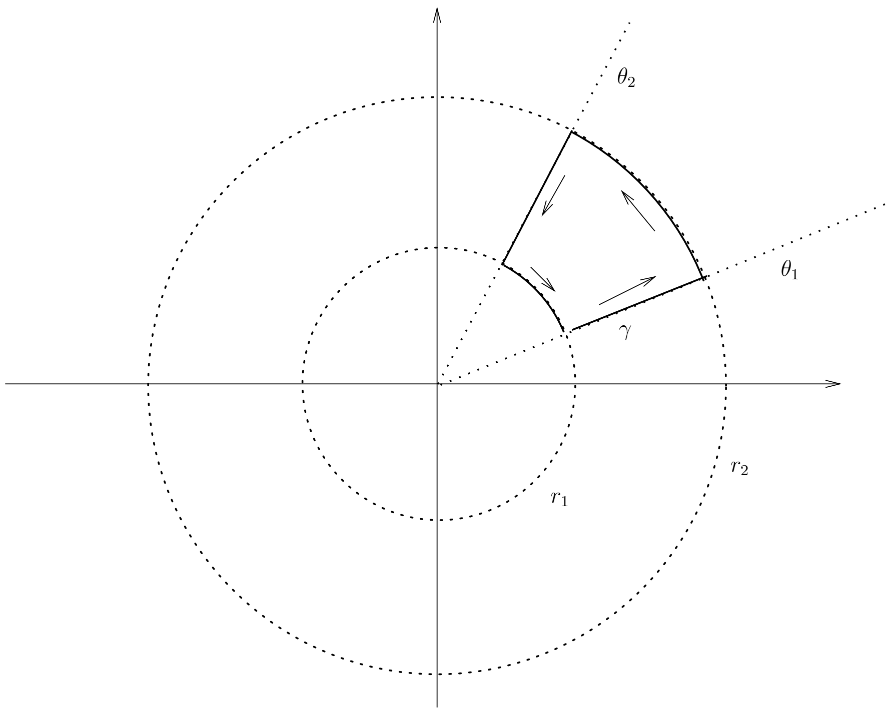

Figura 5.48.: Un possibile percorso chiuso sul quale calcolare il lavoro del campo di forze. Gli unici contributi non nulli sono sui tratti di percorso radiale, dato che sugli altri la forza è perpendicolare allo spostamento.