

PROBLEMA 5.63

Moto in un campo centrale I **

Una particella di massa m_1 viene fissata tramite un filo inestensibile di lunghezza ℓ ad un'altra massa che può muoversi solo verticalmente come in figura. Il filo attraversa il piano tramite un piccolo foro senza attrito.

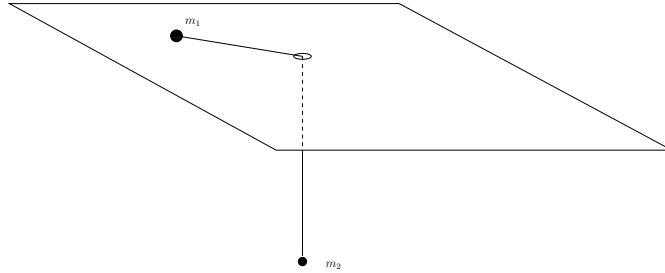


Figura 5.49.: Il piano sul quale si muove la particella m_1 .

Classificare le possibili orbite del sistema.

Soluzione

Il sistema ha due quantità conservate, l'energia totale e il momento angolare della massa m_1 rispetto al foro. L'energia si conserva perchè le forze vincolari non fanno lavoro. Il momento angolare perchè il momento della forza applicata alla particella m_1 (la tensione del filo) rispetto al polo scelto è nulla.

Usando coordinate polari per descrivere la posizione della massa m_1 possiamo scrivere

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1r^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + m_2gr \quad (5.63.1)$$

e per la componente z del momento angolare della particella m_1 abbiamo

$$L_z = m_1r^2\dot{\theta} \quad (5.63.2)$$

Possiamo utilizzare quest'ultima legge di conservazione per eliminare $\dot{\theta}$ dall'energia totale:

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2m_1r^2} + m_2gr \quad (5.63.3)$$

e il problema diviene equivalente al moto unidimensionale di una particella in un potenziale efficace.

Dal relativo grafico (Figura 5.50) si conclude che se $L_z \neq 0$ non è possibile la caduta sul centro, ed inoltre tutte le orbite sono limitate. In particolare si avranno orbite circolari di raggio r_0 quando E coinciderà con il minimo del potenziale effettivo, cioè

$$\frac{L_z^2}{m_1r^3} = m_2g \quad (5.63.4)$$

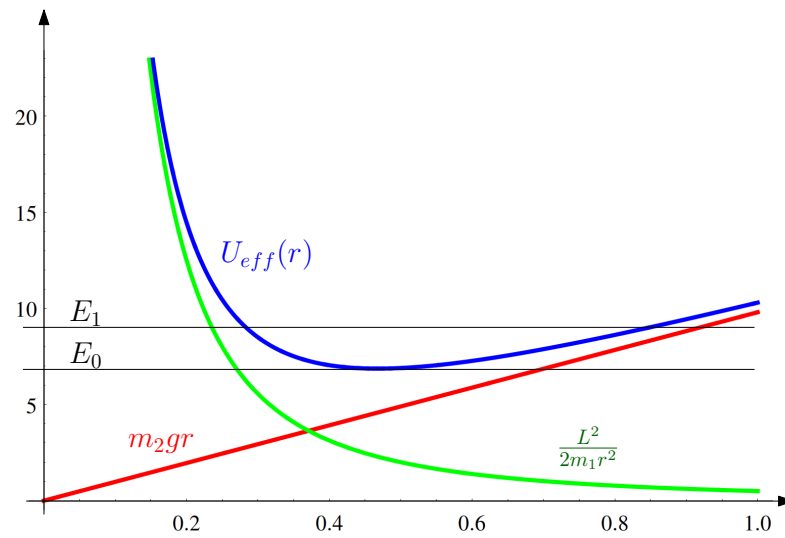


Figura 5.50.: Il potenziale effettivo (in blu) e i due termini che lo compongono: il potenziale gravitazionale originario (in rosso) e il potenziale centrifugo (in verde).

ossia

$$m_1 r \dot{\theta}^2 = m_2 g \quad (5.63.5)$$

che è ovviamente la usuale relazione tra forza radiale e accelerazione centripeta. In Figura 5.50 questo corrisponde all'energia E_0 .