PROBLEMA 5.64

Moto in un campo centrale II ⋆⋆

Determinare le orbite di una particella nel piano sottoposta a un potenziale armonico

$$U = \frac{k}{2}r^2 \tag{5.64.1}$$

usando coordinate polari.

Soluzione

Si conservano il momento angolare e l'energia totale. Queste quantità si scrivono nelle coordinate scelte nella forma

$$L = mr^2\dot{\theta} \tag{5.64.2}$$

e

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kr^2 \tag{5.64.3}$$

ed utilizzando la prima relazione per eliminare la velocità angolare nell'energia otteniamo

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}kr^2 + \frac{L^2}{2mr^2} \tag{5.64.4}$$

Sempre dal momento angolare otteniamo la regola

$$\frac{dr}{dt} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta} \tag{5.64.5}$$

e possiamo riscrivere l'energia nella forma

$$E = \frac{L^2}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}kr^2 + \frac{L^2}{2mr^2} \tag{5.64.6}$$

Introduciamo adesso una nuova variabile della forma

$$s = \frac{1}{r^2} - \beta \tag{5.64.7}$$

ottenendo

$$E(s+\beta) = \frac{L^2}{8m}\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}k + \frac{L^2}{2m}(s+\beta)^2 \tag{5.64.8}$$

Possiamo scegliere β in modo da eliminare il termine del primo ordine in s:

$$\beta = \frac{Em}{L^2} \tag{5.64.9}$$

da cui

$$E' = \frac{E^2 m}{2L^2} - \frac{k}{2} = \frac{L^2}{8m}\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}s^2$$

Questa può essere vista come l'energia E' di un oscillatore armonico per il quale

$$T = \pi \tag{5.64.10}$$

da cui otteniamo

$$s = \frac{1}{r^2} - \frac{Em}{L^2} = \sqrt{\frac{2mE'}{L^2}} \cos\left(2\theta + \varphi\right) \tag{5.64.11}$$

L'orbita è chiaramente chiusa. La scelta di φ equivale chiaramente ad una rotazione dell'orbita, e ci limitiamo a considerare $\varphi = 0$. Possiamo allora scrivere

$$r^2 = \frac{\frac{L^2}{mE}}{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{L^2 k}{mE^2}\right)} \cos\left(2\theta\right)} \tag{5.64.12}$$

che è l'equazione di un'ellisse centrata sull'origine come segue da

$$r^2 \left[1 + \sqrt{\left(1 - \frac{L^2 k}{mE^2}\right)} \cos\left(2\theta\right)\right] = \frac{L^2}{mE} \tag{5.64.13}$$

ossia

$$\left[1 + \sqrt{\left(1 - \frac{L^2 k}{mE^2}\right)}\right] x^2 + \left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{L^2 k}{mE^2}\right)}\right] y^2 = \frac{L^2}{mE} \tag{5.64.14}$$

Notare che

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} kr^2 + \frac{L^2}{2mr^2} \geq \frac{1}{2} kr^2 + \frac{L^2}{2mr^2} \geq \sqrt{\frac{kL^2}{m}} \tag{5.64.15}$$

da cui

$$\frac{kL^2}{mE^2} \leq 1$$

L'uguaglianza corrisponde a un'orbita circolare.

CC BY NC SA