PROBLEMA 5.66

Oscillazioni forzate ⋆⋆⋆

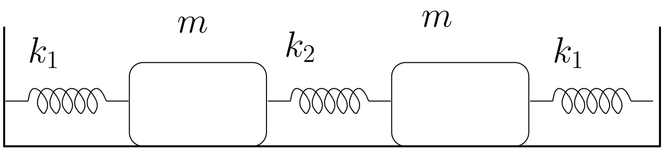

Figura 5.51.: Il sistema considerato nell'esercizio. Si ha attrito viscoso proporzionale alla velocità relativa tra le due masse.

Nel sistema in Figura 5.51 è presente un attrito viscoso γ proporzionale alla velocità relativa tra le due masse. Alla massa più a sinistra è inoltre applicata una forza

$$F = F_0 \cos \Omega t$$

Calcolare la risposta in ampiezza del sistema. Supponendo che la forza sia presente solo da $t > 0$ mostrare che in generale il transiente non sarà mai trascurabile.

Soluzione

Possiamo scrivere le equazioni del moto nella forma

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + \gamma(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) &= F_0 \cos \Omega t \\ m\ddot{x}_2 + \gamma(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) + k_1 x_2 &= 0 \,. \end{aligned}$$

Cerchiamo soluzioni della forma

$$x_i = \mathrm{Re} Z_i e^{i\Omega t} \,.$$

Estendendo le equazioni del moto al campo complesso e sostituendo otteniamo il sistema algebrico

$$\begin{aligned} -m\Omega^2 z_1 + i\Omega\gamma(z_1 - z_2) + k_1 z_1 + k_2(z_1 - z_2) &= F_0 \\ -m\Omega^2 z_2 + i\Omega\gamma(z_2 - z_1) + k_2(z_2 - z_1) + k_1 z_2 &= 0 \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} \left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right) z_1 - (k_2 + i\Omega\gamma)\, z_2 &= F_0 \\ -\,(i\Omega\gamma + k_2)\, z_1 + \left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right) z_2 &= 0 \,. \end{aligned}$$

Risolvendo otteniamo

$$z_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -(k_2 + i\Omega\gamma) \\ 0 & \left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right) & -(k_2 + i\Omega\gamma) \\ -(i\Omega\gamma + k_2) & \left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right) \end{vmatrix}}$$

CC BY NC SA

$$z_2 = \frac{\begin{vmatrix} \left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right) & F_0 \\ -\left(i\Omega\gamma + k_2\right) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right) & -\left(k_2 + i\Omega\gamma\right) \\ -\left(i\Omega\gamma + k_2\right) & \left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right) \end{vmatrix}}$$

ossia

$$z_1 = \frac{F_0\left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right)}{\left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right)^2 - \left(i\Omega\gamma + k_2\right)^2}$$

$$z_2 = \frac{F_0\left(k_2 + i\Omega\gamma\right)}{\left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right)^2 - \left(i\Omega\gamma + k_2\right)^2} .$$

Il numeratore di queste espressioni può essere fattorizzato ed abbiamo

$$z_1 = -\frac{F_0\left(m\Omega^2 - i\Omega\gamma - k_1 - k_2\right)}{\left(m\Omega^2 - k_1\right)\left(m\Omega^2 - 2i\gamma\Omega - k_1 - 2k_2\right)}$$

$$z_2 = \frac{F_0\left(k_2 + i\Omega\gamma\right)}{\left(m\Omega^2 - k_1\right)\left(m\Omega^2 - 2i\gamma\Omega - k_1 - 2k_2\right)}$$

e calcolando il modulo di queste espressioni otteniamo la risposta in ampiezza

$$|z_2| = \sqrt{\frac{k_2^2 + \Omega^2\gamma^2}{\left(m\Omega^2 - k_1 - 2k_2\right)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \frac{F_0}{|m\Omega^2 - k_1|} .$$

Notare che il denominatore si annulla per il valore reale della frequenza

$$\Omega = \pm\sqrt{\frac{k_1}{m}}.$$

Questo indica la presenza di un modo di oscillazione non smorzata nell'evoluzione libera del sistema. L'interpretazione fisica è che le due masse possono oscillare in fase con velocità relativa nulla, ed in questo caso non sono presenti effetti dissipativi. Per questo motivo non sarà possibile in generale trascurare la presenza di un transiente, anche per tempi molto grandi.