PROBLEMA 5.67

Slitta verticale ⋆⋆

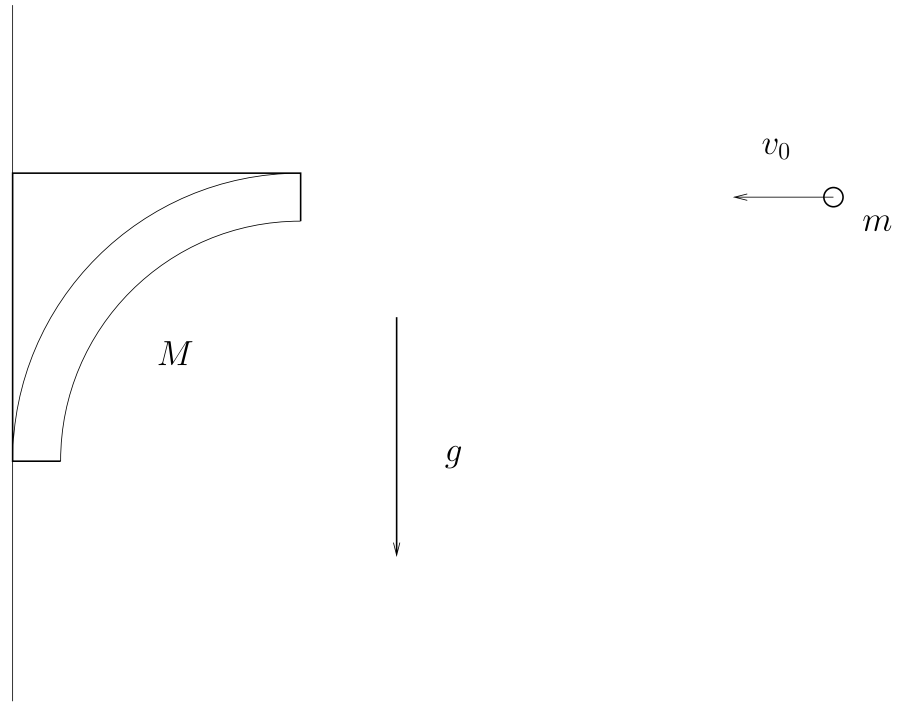

Figura 5.52.: Slitta verticale.

Su una slitta di massa M e dimensioni trascurabili è montato un condotto liscio che permette il passaggio di una pallina di massa m, lanciata verso la slitta con velocità iniziale v_0 parallela all'orizzontale dalla stessa quota ad una distanza d (vedere Figura 5.52). La slitta è libera di muoversi senza attrito su un binario verticale e viene lasciata andare al momento del lancio.

1. In assenza di gravità, calcolare le velocità finali di slitta e pallina.
2. In presenza di gravità, sotto quali condizioni la pallina entra nel tubo?
3. In presenza di gravità, per quale valore di v la slitta si ferma subito dopo l'urto?

Soluzione

Domanda 1

In assenza di gravità si conserva l'energia cinetica totale e la quantità di moto verticale). Abbiamo quindi

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}M\dot{Y}^2 \tag{5.67.1}$$

e

$$0 = m\dot{y} + M\dot{Y} \tag{5.67.2}$$

Ricaviamo $\dot{y}$ dalla seconda relazione

$$\dot{y} = -\frac{M}{m}\dot{Y} \tag{5.67.3}$$

e sostituendo nella prima otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{m}(M+m)\,\dot{Y}^2 \tag{5.67.4}$$

e quindi

$$\dot{Y} = \pm\sqrt{\frac{m^2}{M(M+m)}}v_0 \tag{5.67.5}$$

e

$$\dot{y} = \mp\sqrt{\frac{M}{(M+m)}}v_0 \tag{5.67.6}$$

La soluzione con $\dot{Y} < 0$, $\dot{y} > 0$ non è chiaramente accettabile.

Domanda 2

In presenza di gravità la particella si muove con accelerazione costante g diretta verso il basso e con velocità costante in orizzontale. La slitta si muove verso il basso con accelerazione g. Le leggi orarie si scrivono quindi

$$x = d - v_0 t \tag{5.67.7}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{5.67.8}$$

$$X = 0 \tag{5.67.9}$$

$$Y = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{5.67.10}$$

e dato che il moto verticale di slitta e particella è identico, la pallina entra sempre nel tubo.

Domanda 3

Dato che le dimensioni della slitta sono trascurabili, l'interazione tra slitta e particella avviene pure in un tempo trascurabile. Questo significa che la forza di gravità sarà trascurabile durante l'urto rispetto alla forza impulsiva tra slitta e particella.e successivo ale, tra l'istante immediatamente precedente e quello immediatamente successivo al contatto tra particella e slitta varrà la conservazione della quantità di moto verticale totale (l'unica forza verticale non trascurabile è quella impulsiva interna) e la conservazione dell'energia cinetica totale (lo spostamento verticale di slitta e particella sono trascurabili).

L'interazione avviene all'istante

$$t = \frac{d}{v_0} \tag{5.67.11}$$

e in tale istante (prima dell'urto) l'energia cinetica del sistema vale

$$K = \frac{1}{2}M\left(-g\frac{d}{v_0}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left[v_0^2 + \left(-g\frac{d}{v_0}\right)^2\right] = \frac{1}{2}(M+m)\frac{g^2d^2}{v_0^2} + \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{5.67.12}$$

e la quantità di moto verticale totale

$$P_y = -\frac{(M+m)\,gd}{v_0} \tag{5.67.13}$$

Eguagliando alle stesse quantità dopo l'urto abbiamo

$$K = \frac{1}{2}M\dot{Y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \tag{5.67.14}$$

e

$$P_y = -M\dot{Y} - m\dot{y} \tag{5.67.15}$$

Siamo interessati al caso $\dot{Y} = 0$, quindi deve essere

$$\frac{1}{2}(M+m)\frac{g^2d^2}{v_0^2} + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \tag{5.67.16}$$

e

$$-\frac{(M+m)\,gd}{v_0} = -m\dot{y} \tag{5.67.17}$$

Ricavando $\dot{y}$ dalla seconda relazione e sostituendo nella prima abbiamo

$$(M+m)\frac{g^2d^2}{v_0^2} + mv_0^2 = m\left[\frac{(M+m)gd}{mv_0}\right]^2 \tag{5.67.18}$$

che risulta verificata quando

$$v_0^2 = gd\sqrt{\frac{M(M+m)}{m^2}}$$