PROBLEMA 5.68

## Pendolo sferico ⋆⋆

Discutere le traiettorie di un pendolo sferico, cioè di una particella vincolate nello spazio da un filo inestensibile di lunghezza $\ell$.

### Soluzione

Conviene descrivere il sistema in coordinate sferiche. Possiamo scrivere l'energia cinetica come

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) = \frac{1}{2}m\ell^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$$

e l'energia potenziale

$$U = mgz = mg\ell\cos\theta\,.$$

Osserviamo che sulla particella agiscono due forze: la forza peso e la reazione vincolare della superficie. Possiamo scrivere

$$\vec{F} = -mg\hat{e}_z - N\hat{e}_r$$

ma dato che

$$\vec{r} = \ell\hat{e}_r$$

abbiamo

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = -mg\ell\hat{e}_r \wedge \hat{e}_z - N\ell\hat{e}_r \wedge \hat{e}_r$$

da cui segue che $\vec{M}\cdot\hat{e}_z = 0$. Quindi il momento delle forze non ha componenti verticali e la componente $z$ del momento angolare si conserva:

$$L_z = m\ell^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$$

Utilizziamo questa relazione per riscrivere l'energia totale nella forma

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta)$$

dove

$$U_{eff}(\theta) = mg\ell\cos\theta + \frac{L_z^2}{2m\ell^2\sin^2\theta} = mg\ell\left(\cos\theta + \frac{\beta^2}{1-\cos^2\theta}\right)\,.$$

Per comodità abbiamo introdotto la variabile adimensionale

$$\beta^2 = \frac{L_z^2}{2m^2\ell^3 g}\,.$$

Il grafico qualitativo è riportato in Figura 5.53, per diversi valori di $\beta$.

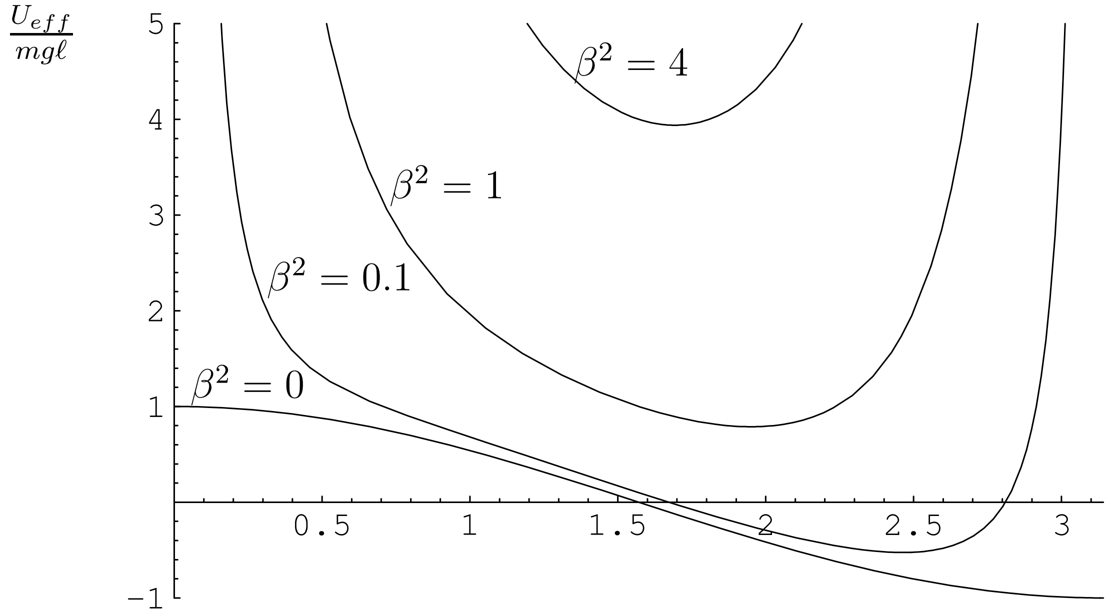


Figura 5.53.: Potenziale effettivo per il pendolo sferico.