PROBLEMA 5.6

Attraversamento di una buca ⋆⋆

In un piano orizzontale (in presenza di gravità) è praticata una scanalatura triangolare come in figura, di altezza h e apertura angolare 2θ. Un punto materiale si muove sulla superficie risultante, che può essere considerata un vincolo liscio, con spigoli sufficientemente smussati.

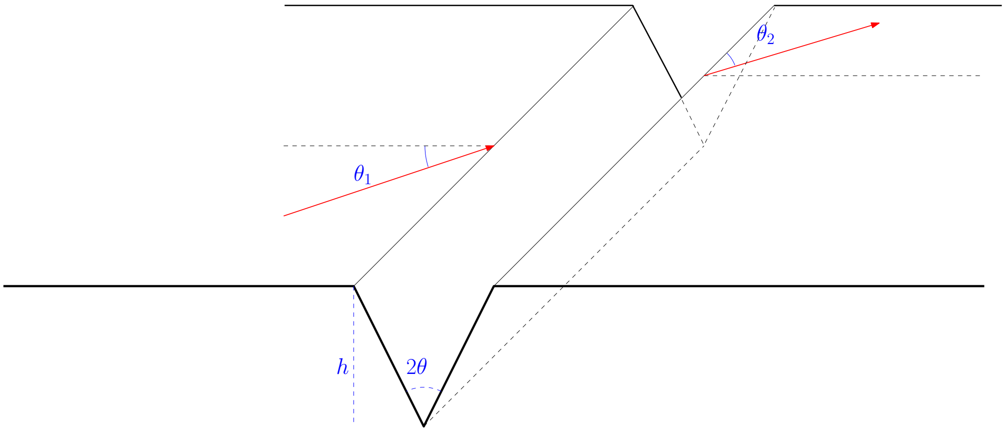

Figura 5.5.: Figura per il problema.

Dimostrare, senza utilizzare principi di conservazione, che l'angolo di uscita θ_1 e quello di entrata θ_2 nella scanalatura sono uguali. Dire inoltre se la traiettoria all'uscita della scanalatura è il prolungamento di quella in entrata.

Soluzione

Il moto sui due piani inclinati è un moto accelerato nella direzione perpendicolare alla scanalatura, con accelerazione nella fase discendente e $-a$ in quella ascendente. Nella direzione parallela avremo un moto uniforme. La legge oraria sul piano discendente sarà

$$
\begin{aligned}
x &= v_0 \cos\theta_1\, t + \frac{1}{2} a t^2 \\
y &= v_0 \sin\theta_1\, t \\
v_x &= v_0 \cos\theta_1 + at \\
v_y &= v_0 \sin\theta_1
\end{aligned}
$$

e su quello ascendente

$$\begin{aligned}
x &= (v_0 \cos\theta_1 + \Delta v_x)\, t - \frac{1}{2} a t^2 \\
y &= v_0 \sin\theta_1\, t \\
v_x &= (v_0 \cos\theta_1 + \Delta v_x) - a t \\
v_y &= v_0 \sin\theta_1
\end{aligned}$$

Nel primo caso abbiamo usato un sistema di coordinate con origine nel punto di ingresso del punto materiale nel primo piano inclinato, asse x nella direzione di massima pendenza del piano e asse y parallelo alla scanalatura. Nel secondo caso l'origine è ancora nel punto di ingresso del punto materiale (questa volta nel secondo piano inclinato), asse x nella direzione di massima pendenza e asse y parallelo alla scanalatura. Δv_x è l'incremento di velocità dovuto alla accelerazione sul primo piano inclinato.

Si vede facilmente che il tempo di discesa t_d è uguale a quello di salita t_s. Detta $\ell = h/\cos\theta$ la lunghezza di un piano inclinato abbiamo che t_d soddisfa

$$\ell = v_0 \cos\theta_1\, t_d + \frac{1}{2} a t_d^2$$

mentre per t_s vale

$$\ell = (\Delta v_x + v_0 \cos\theta_1)\, t_s - \frac{1}{2} a t_s^2$$

ma $\Delta v_x = a t_d$ per cui quest'ultima equazione diviene

$$\ell = v_0 \cos\theta_1\, t_s - \frac{1}{2} a t_s^2 + a t_d t_s$$

che è chiaramente verificata da $t_s = t_d$. Allora all'uscita della scanalatura avremo

$$\begin{aligned}
v_x &= v_0 \cos\theta_1 + a t_s - a t_s \\
v_y &= v_0 \sin\theta_1
\end{aligned}$$

il che significa $\theta_1 = \theta_2$.

Per rispondere alla seconda domanda notiamo che il moto in direzione trasversa è un moto uniforme con velocità $v_0 \sin\theta_1$, nel primo sarebbe in assenza della fenditura. Ma nel secondo caso il tempo di attraversamento è $2t_d$, nel primo sarebbe

$$t_a = \frac{2h}{v_0 \cos\theta_1} \tan\theta\,.$$

I due tempi coincidono se

$$\frac{h}{v_0 \cos\theta_1} \tan\theta = t_d = \frac{-v_0 \cos\theta_1 + \sqrt{v_0^2 \cos^2\theta_1 + 2gh}}{g \cos\theta}$$

ossia (supponendo $h > 0$)

$$q \sin\theta = \frac{2q}{1+\sqrt{1+2q}}, \qquad q = \frac{gh}{v_0^2 \cos^2\theta_1}$$

Solo se questa ultima condizione è soddisfatta, o nel caso banale $\theta_1 = 0$, le due traiettorie risultano allineate.