PROBLEMA 5.71

Cambiamento parametri orbita ⋆⋆

Un pianeta di massa m é in orbita circolare (raggio R_0) attorno ad una stella di massa M. Ad un certo istante la stella espelle verso l'esterno una parte ΔM della sua massa, concentrandola in un guscio sferico di raggio $r(t)$ crescente. Supponendo di poter trascurare l'effetto dell'urto del materiale sul pianeta calcolare l'eccentricità dell'orbita quando $r(t) > R_0$. Si assuma $M - \Delta M \gg m$.

Soluzione

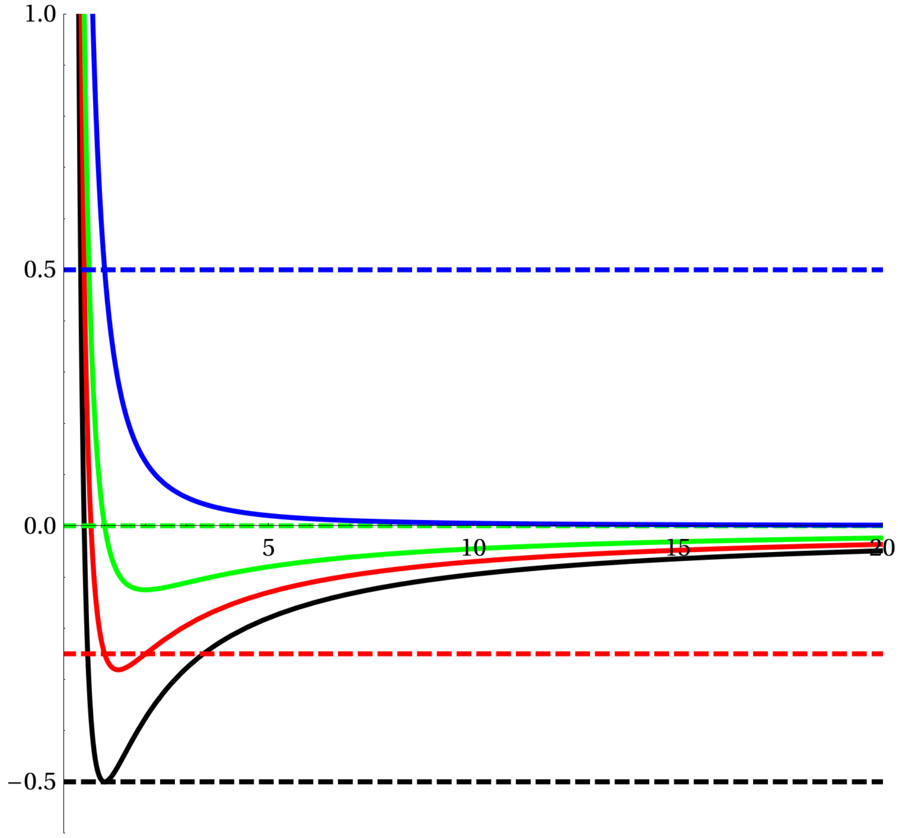

Figura 5.54.: Il valore dell'energia totale in unità k/R_0 (retta orizzontale tratteggiata) e del potenziale efficace (curva continua) dopo l'espulsione della massa in funzione di r/R_0. Le differenti curve si riferiscono a $\Delta M/M = 0$ (nessuna espulsione, nero) $\Delta M/M = 1/4$ (rosso) $\Delta M/M = 1/2$ (verde) $\Delta M/M = 1$ (massa completamente espulsa,blu). Notare che una intersezione è sempre a $r = R_0$.

Per semplicità poniamo $k = GMm$ e $k' = k - \Delta k$ con $\Delta k = G\Delta Mm$. Possiamo scrivere l'energia del pianeta nella forma

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

Se la particella si trova in un'orbita circolare di raggio R_0 allora

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial r}(R_0) = -\frac{L^2}{mR_0^3} + \frac{k}{R_0^2} = 0$$

cioè

$$L^2 = kmR_0$$

Al momento in cui il guscio sferico di massa supera l'orbita il momento angolare non cambia, e la velocità radiale rimane nulla. Quindi l'energia vale

$$E' = \frac{L^2}{2mR_0^2} - \frac{k'}{R_0} = \frac{k}{2R_0} - \frac{k'}{R_0}$$

e il nuovo potenziale efficace

$$U'_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k'}{r} = \frac{kR_0}{2r^2} - \frac{k'}{r}$$

Il raggio massimo e minimo saranno determinati dalle soluzioni di $E' = U'_{eff}$ cioè

$$\frac{k}{2R_0} - \frac{k'}{R_0} = \frac{kR_0}{2r^2} - \frac{k'}{r}$$

Riordinando i termini abbiamo

$$\frac{kR_0}{2}\left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R^2}\right) = k'\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right)$$

Eliminando la soluzione banale $R = R_0$ troviamo infine

$$\frac{1}{R} = \left(\frac{2k'}{k} - 1\right)\frac{1}{R_0} = \left(1 - 2\frac{\Delta k}{k}\right)\frac{1}{R_0}$$

Notiamo che è la variazione relativa della massa della stella. Se $\Delta k/k < 1/2$ otteniamo una nuova orbita ellittica, in caso contrario la nuova orbita è illimitata. Possiamo calcolare direttamente l'eccentricità usando la formula

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E'L^2}{mk'^2}} = \sqrt{1 + \frac{2R_0}{k}\left(\frac{k}{2R_0} - \frac{k'}{R_0}\right)} = \frac{\Delta M}{M - \Delta M}$$

La formula conferma che abbiamo un ellisse per $\Delta M/M < 1/2$, una parabola per $\Delta M/M = 1/2$ ed un'iperbole per $1/2 < \Delta M/M < 1$. Il caso $\Delta M/M = 1$ corrisponde ad una traiettoria rettilinea, dato che tutta la massa è stata espulsa e non vi sono più forze gravitazionali, che possiamo interpretare anche come iperbole degenere.