PROBLEMA 5.72

Precessione di un'orbita ⋆⋆⋆

Studiare le orbite limitate di un punto materiale in un potenziale della forma

$$U = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\varepsilon}{r^2}$$

dove r è la distanza dall'origine di un sistema di coordinate e $\alpha > 0$. Mostrare che il punto di massimo e di minimo avvicinamento al centro precede per $\varepsilon \neq 0$ e calcolare l'angolo di precessione.

Soluzione

Dato che si conserva l'energia totale e il momento angolare rispetto all'origine del sistema di coordinate, sappiamo che il moto avviene in un piano e possiamo descriverlo utilizzando coordinate polari. Abbiamo allora

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{\alpha}{r} + \frac{\epsilon}{r^2}$$

e

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

Possiamo anzitutto scrivere l'energia nella forma

$$E = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right]\dot{\theta}^2 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\epsilon}{r^2}$$

ed eliminare $\dot{\theta}$ utilizzando la conservazione del momento angolare

$$E = \frac{L^2}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{L^2}{2m} + \epsilon\right)\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

ottenendo un'equazione che lega r a θ, e permette in linea di principio di ottenere la traiettoria. Introduciamo adesso la nuova coordinata $u = 1/r$: sostituendo nell'equazione precedente otteniamo

$$E = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{L^2}{2m} + \epsilon\right)u^2 - \alpha u$$

che formalmente è l'energia di un oscillatore armonico soggetto ad una forza costante. In effetti se deriviamo rispetto a θ otteniamo

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{L^2}{m}\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(\frac{L^2}{m} + 2\epsilon\right)u\frac{du}{d\theta} - \alpha\frac{du}{d\theta}$$

che si deve annullare dato che E si conserva. Questo accade nei due casi

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\theta} &= 0\\ \frac{L^2}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2}+\left(\frac{L^2}{m}+2\epsilon\right)u &= \alpha\end{aligned}$$

Il primo corrisponde ad una traiettoria circolare, $r = 1/u =$ costante. Concentriamoci sul secondo, che ha per soluzione generale

$$u = A\cos\left(\beta\theta+\phi\right)+\alpha\left(\frac{L^2}{m}+2\epsilon\right)^{-1}$$

dove A e ϕ sono costanti arbitrarie da determinare con le condizioni al contorno, e

$$\beta = \sqrt{1+\frac{2m\epsilon}{L^2}}$$

Chiaramente un cambiamento di ϕ equivale ad una rotazione globale dell'orbita, possiamo quindi fissare $\phi = 0$ senza perdere di generalità. I punti di massimo e minimo avvicinamento corrisponderanno ai minimi e ai massimi del coseno, e quindi a

$$\beta\theta = k\pi$$

e quindi ad ogni giro questi avanzeranno di un angolo

$$\delta\theta = 2\pi\left(\frac{1}{\beta}-1\right)$$

che si annulla per $\epsilon = 0$.