

PROBLEMA 5.73

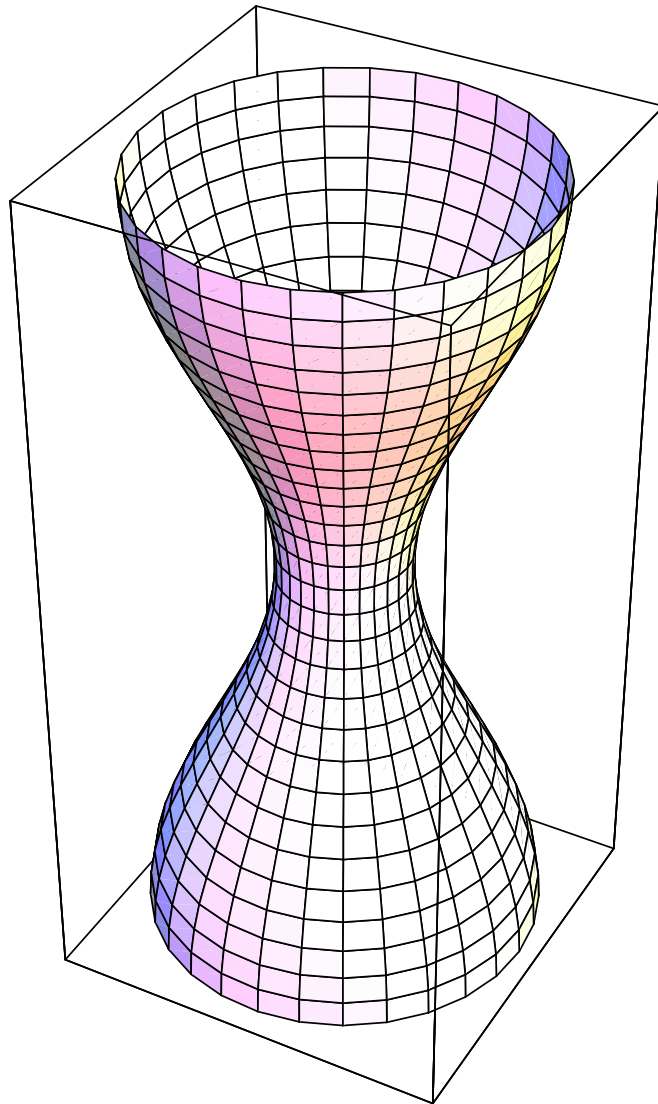
**Uscire da una bottiglia \*\***

Figura 5.55.: La superficie su cui avviene il moto del punto materiale.

Un punto materiale è vincolato a muoversi su una superficie liscia descritta in coordinate cilindriche dall'equazione

$$\rho = a + b \cos kz$$

con  $a > b > 0$  (vedere Figura 5.55). Studiare le possibili orbite in assenza di gravità, verificando in particolare l'esistenza di orbite limitate e circolari.

### Soluzione

L'unica forza in gioco è la reazione vincolare, normale alla superficie liscia. Dato che la velocità della particella è sempre tangente alla superficie tale forza non può fare lavoro, si conserva quindi l'energia cinetica. Questo significa che il modulo della velocità della particella rimane costante.

Inoltre per motivi di simmetria la forza è contenuta nel piano definito dall'asse  $z$  e dal vettore posizione del punto materiale, e quindi il suo momento non può avere componenti lungo  $z$ . Esplicitamente, la reazione vincolare sarà del tipo

$$\vec{N} = N_\rho \hat{e}_\rho + N_z \hat{e}_z$$

cioè priva di componenti nella direzione di  $\hat{e}_\phi$ . Dato che il vettore posizione è

$$\vec{R} = z \hat{e}_z + \rho \hat{e}_\rho$$

si verifica subito che

$$\vec{M} = \vec{R} \wedge \vec{N} = (N_\rho \hat{e}_\rho + N_z \hat{e}_z) \wedge (z \hat{e}_z + \rho \hat{e}_\rho)$$

ossia

$$\vec{M} = (zN_z - \rho N_\rho) (\hat{e}_z \wedge \hat{e}_\rho)$$

(notare che  $\hat{e}_z \wedge \hat{e}_\rho = \hat{e}_\phi$ ). Di conseguenza si conserva la componente  $z$  del momento angolare

$$L_z = m\rho^2 \dot{\phi}$$

Quindi l'energia si scrive

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

Possiamo eliminare  $\dot{\phi}$  usando la conservazione di  $L_z$ , e usare la condizione di appartenenza al piano per eliminare  $\rho$  e

$$\dot{\rho} = -bk\dot{z} \sin kz$$

ottenendo

$$E = \frac{1}{2}m(1 + b^2k^2 \sin^2 kz) \dot{z}^2 + U_{eff} \quad (5.73.1)$$

con

$$U_{eff} = \frac{L_z^2}{2m(a + b \cos kz)^2}$$

Dato che il primo termine al membro destro della (5.73.1) deve essere positivo abbiamo che il moto può avvenire solo nella regione in cui  $U_{eff}(z) < E$ . Rappresentando graficamente il potenziale effettivo (Figura (5.56)) che è una funzione periodica di  $z$ , troviamo che esistono orbite a  $z$  costante, per un valore dell'energia

$$E = \min U_{eff} = \frac{L_z^2}{2m(a+b)^2}$$

che corrisponde al minimo del potenziale effettivo. Dato che  $\rho$  è funzione di  $z$ , queste saranno anche orbite circolari.

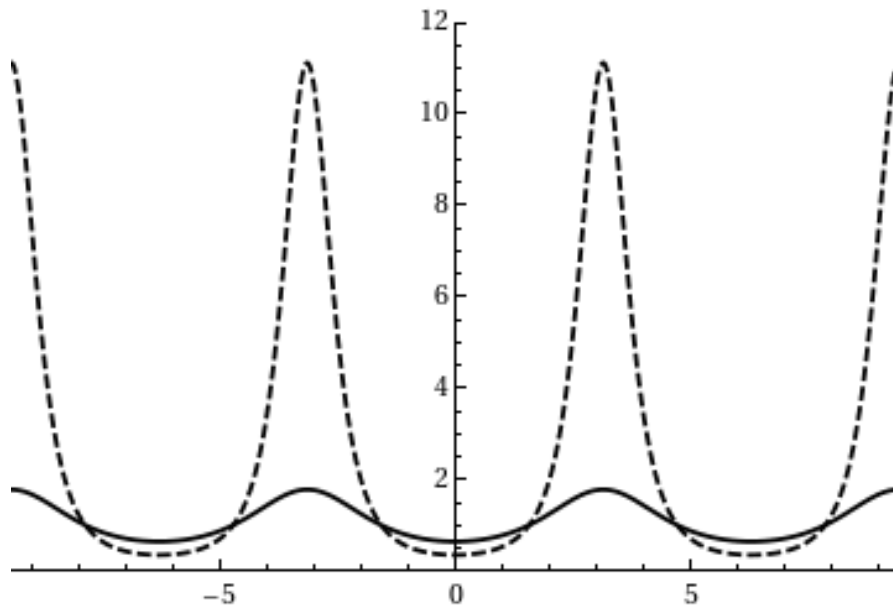


Figura 5.56.: Sulle ordinate, il potenziale effettivo in unità  $\frac{L_z^2}{2ma^2}$ . Sulle ascisse,  $kz$ . In nero, il potenziale effettivo per  $b/a = 1/4$  (linea continua) e per  $b/a = 7/10$  (linea tratteggiata). Per un fissato valore del momento angolare, la barriera da superare cresce quando  $b$  si avvicina ad  $a$  (bottiglia molto "strozzata").

Se

$$\min U_{eff} < E < \max U_{eff} = \frac{L_z^2}{2m(a-b)^2}$$

avremo orbite limitate. Infine per

$$E > \max U_{eff}$$

avremo orbite illimitate.

Consideriamo infine due casi particolari.

Se  $L_z = 0$  allora  $U_{eff} = 0$ . La particella si muove quindi longitudinalmente lungo la superficie.

Se  $E = \max U_{eff}$  la particella si avvicina alla  $z$  corrispondente al massimo del potenziale effettivo. Per capire cosa accada in questo caso conviene approssimare l'energia in un intorno di tale massimo. Poniamo ad esempio  $z = \pi/k + \delta$ , e sostituendo otteniamo

$$\frac{L_z^2}{2m(a-b)^2} = \frac{1}{2}m\delta^2 + \frac{L_z^2}{2m(a-b)^2} - \frac{1}{2} \frac{bk^2L_z^2}{m(a-b)^3}\delta^2$$

che possiamo integrare scrivendo

$$\dot{\delta} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \frac{bk^2L_z^2}{m^2(a-b)^3}}\delta^2$$

e quindi

$$t = \pm \int_{\delta(0)}^{\delta(t)} \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{2m^2(a-b)^3}{bk^2L_z^2}} d\delta$$

Dato che l'integrale diverge se  $\delta(t) \rightarrow 0$ , la particella arriverà al massimo del potenziale effettivo in un tempo infinito.