PROBLEMA 5.74

Moto su un toro ⋆⋆⋆

Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie del toro in Figura 5.57, descritto dalle equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x &= (R + r\cos\theta)\cos\phi \\ y &= (R + r\cos\theta)\sin\phi \\ z &= r\sin\theta \end{aligned}$$

Verificare la conservazione del momento angolare in direzione z, e determinare le traiettorie.

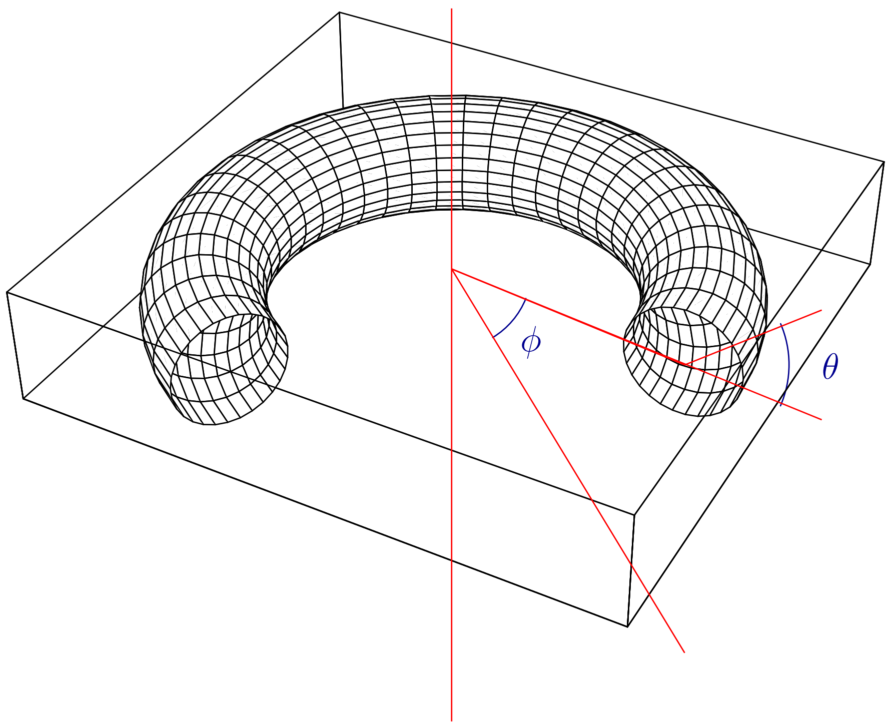

Figura 5.57.: La superficie sulla quale avviene il moto della particella.

Soluzione

La conservazione del momento angolare in direzione z discende dal fatto che l'unica forza in gioco (la reazione vincolare, normale alla superficie) ha sempre un momento con componente z nulla. Utilizziamo le coordinate θ, ϕ per descrivere la posizione del punto sulla superficie. Possiamo costruire due versori tangenti alla superficie derivando

$\vec{r}$ rispetto ad esse e normalizzando:

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\cos\phi \\ -r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\phi} = \begin{pmatrix} -R\sin\phi \\ R\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\hat{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo completare la base introducendo il versore

$$\hat{e}_n = \hat{e}_\theta \wedge \hat{e}_\phi = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\sin\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\phi\cos\theta \\ -\sin\phi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

normale alla superficie. La terna di versori introdotta è, come si verifica facilmente, ortonormale. Nel seguito ci serviranno le loro derivate rispetto al tempo, che valgono

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} &= -\dot{\phi}\sin\theta\hat{e}_\phi + \dot{\theta}\hat{e}_n \\ \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} &= \dot{\phi}\sin\theta\hat{e}_\theta + \dot{\phi}\cos\theta\hat{e}_n \\ \frac{d\hat{e}_n}{dt} &= -\dot{\theta}\hat{e}_\theta - \cos\theta\dot{\phi}\hat{e}_\phi \end{aligned}$$

Scriviamo adesso il vettore posizione come

$$\vec{r} = -R\sin\theta\hat{e}_\theta - (r + R\cos\theta)\,\hat{e}_n$$

e derivando otteniamo la velocità

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + (R + r\cos\theta)\,\dot{\phi}\hat{e}_\phi$$

e l'accelerazione

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left[\dot{\phi}^2\,(R + r\cos\theta)\sin\theta + r\ddot{\theta}\right]\hat{e}_\theta \\ &+ \left[(R + r\cos\theta)\,\ddot{\phi} - 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta\right]\hat{e}_\phi \\ &+ \left[r\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\cos\theta\,(R + r\cos\theta)\right]\hat{e}_n \end{aligned}$$

Dato che non si hanno forze tangenti alla superficie le accelerazioni nelle direzioni $\hat{e}_\theta$ e $\hat{e}_\phi$ è nulla, per cui

$$\begin{aligned}\dot{\phi}^2 (R + r\cos\theta)\sin\theta + r\ddot{\theta} &= 0\\ (R + r\cos\theta)\ddot{\phi} - 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta &= 0\end{aligned}$$

La seconda può essere integrata direttamente, dopo aver moltiplicato per $m(R + r\cos\theta)$

$$\frac{d}{dt}\left[m(R + r\cos\theta)^2\dot{\phi}\right] = 0$$

ma questa è proprio la conservazione del momento angolare in direzione z, dato che $R + r\cos\theta$ è la distanza da tale asse e $\dot{\phi}$ la componente z della velocità angolare

$$L_z = m(R + r\cos\theta)^2\dot{\phi}$$

Scriviamo adesso l'energia cinetica, che si conserva:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[r^2\dot{\theta}^2 + (R + r\cos\theta)^2\dot{\phi}^2\right]$$

Possiamo eliminare $\dot{\phi}$ utilizzando la conservazione del momento angolare, ottenendo

$$E = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{2mR^2\left(1 + \frac{r}{R}\cos\theta\right)^2}$$

che permette lo studio qualitativo del moto in θ. Il potenziale effettivo è rappresentato in Figura 5.58. Abbiamo una soluzione con $\theta = 0$ (corrispondente al minimo del potenziale effettivo) in cui la particella resta sul bordo esterno del toro, compiendo un moto circolare uniforme con velocità angolare

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{m(R + r)^2}$$

Per valori dell'energia intermedi tra il massimo e il minimo θ oscilla tra un valore massimo e il suo opposto, la traiettoria è quindi una oscillazione centrata sul bordo esterno del toro, accompagnata da un'avanzamento di ϕ. Infine per valori dell'energia maggiori del massimo θ aumenta (o diminuisce) senza limite. La traiettoria è quindi una spirale che si avvolge al toro.

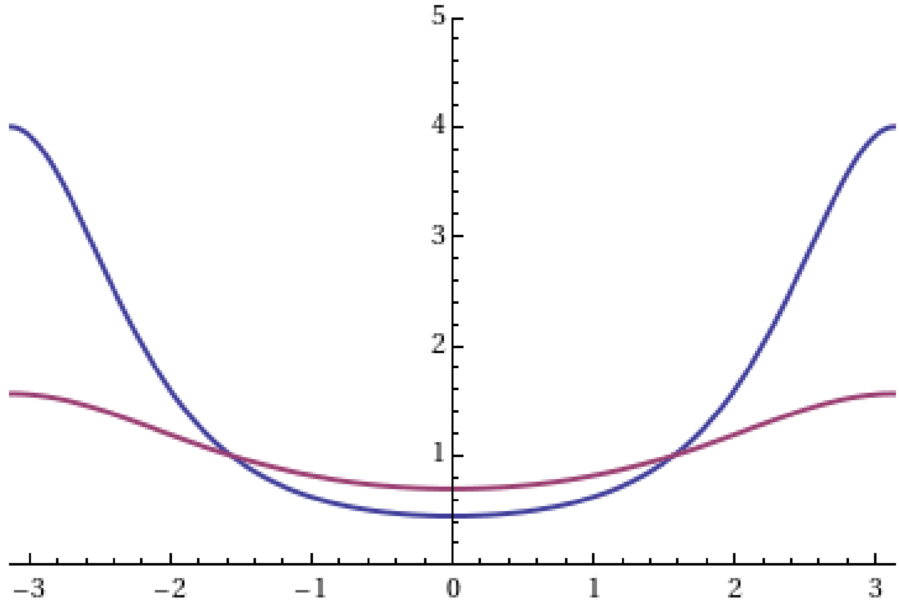

Figura 5.58.: Il potenziale effettivo in unità $\frac{L_z^2}{2mR^2}$ in funzione di θ per $r/R = 0.2$ (in rosso) e r/R=0.5 (in blu).