PROBLEMA 5.75

Pendolo nello spazio delle fasi ⋆⋆

Si condideri un pendolo di lunghezza ℓ e massa m. Detto θ l'angolo che il pendolo forma rispetto alla verticale e ω la sua velocità angolare

1. Mostrare che le equazioni del moto si possono scrivere nella forma
$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= f(\omega, \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} &= g(\omega, \theta) \end{aligned}$$
e determinare le funzioni f e g.

2. Determinare le possibili traiettorie del pendolo nel piano ω, θ nella forma
$$G(\omega, \theta) = 0$$
dove G è una opportuna funzione, rappresentarle graficamente e discuterne il significato.

3. Trovare la $G(\omega, \theta)$ che corrisponde alle condizioni iniziali
$$\begin{aligned} \theta(0) &= 0 \\ \omega(0) &= \omega_0 \end{aligned}$$
scegliendo per ω_0 il minimo valore che permette al pendolo di raggiungere la posizione $\theta = \pi$. Mostrare che tale posizione viene raggiunta in un tempo infinito (si supponga che la massa sia vincolata ad una sbarretta rigida).

Soluzione

Domanda 1

L'equazione del moto del pendolo si può scrivere immediatamente in coordinate polari scrivendo $\vec{F} = m\vec{a}$ per la componente tangenziale alla traiettoria. Per un moto circolare l'accelerazione tangenziale vale $\ell\ddot{\theta}$ e la componente tangenziale della forza $-mg\sin\theta$, da cui
$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta\,.$$
Dato che $\omega = \dot{\theta}$ sostituendo nella precedente relazione troviamo subito
$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= -\frac{g}{\ell}\sin\theta = f(\omega, \theta) \\ \dot{\theta} &= \omega = g(\omega, \theta)\,. \end{aligned}$$

Domanda 2

Dividendo membro a menbro le equazioni scritte precedentemente si trova subito che

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{f(\omega,\theta)}{g(\omega,\theta)} = -\frac{g}{\ell}\frac{\sin\theta}{\omega}.$$

Questa è un'equazione differenziale a variabili separabili che si può integrare direttamente:

$$\int \omega d\omega = -\frac{g}{\ell}\int \sin\theta d\theta$$

da cui

$$\frac{1}{2}\omega^2 - \frac{g}{\ell}\cos\theta - C = G(\omega,\theta) = 0$$

dove C è una costante arbitraria. Possiamo scrivere allora

$$\omega = \pm\sqrt{2\left(C + \frac{g}{\ell}\cos\theta\right)}.$$

Osserviamo che il luogo dei punti che soddisfano questa relazione è simmetrico rispetto agli assi $\omega = 0$ e $\theta = 0$. Inoltre si ripete periodicamente lungo θ con periodo 2π, sarà quindi sufficiente studiarlo tra $\theta = -\pi$ e $\theta = \pi$.

Occorre distinguere diversi casi:

1. Se $C < -\frac{g}{\ell}$ la quantità sotto radice è sempre negativa, e non esiste nessuna traiettoria.

2. Se $-\frac{g}{\ell} \le C \le \frac{g}{\ell}$ solo alcuni valori di θ sono possibili, più precisamente quelli per i quali
$$\cos\theta > -\frac{\ell}{g}C.$$

3. Per $C > \frac{g}{\ell}$ tutti i valori di θ sono possibili.

Alcune possibili traiettorie sono rappresentate in Figura 5.59. Le curve chiuse ($C < 1$) rappresentano moti oscillatori, le altre corrispondono ai casi nei quali il pendolo, avendo energia sufficientemente elevata, ruota sempre nello stesso verso (senso orario per la traiettoria con $\omega < 0$ e senso antiorario per quella con $\omega > 0$).

Problema 3

Date le condizioni iniziali la traiettoria deve passare dal punto $(\theta,\omega) = (0,\omega_0)$, deve cioè essere

$$G(\omega_0, 0) = \frac{1}{2}\omega_0^2 - \frac{g}{\ell} - C = 0$$

che significa

$$C = \frac{1}{2}\omega_0^2 - \frac{g}{\ell}.$$

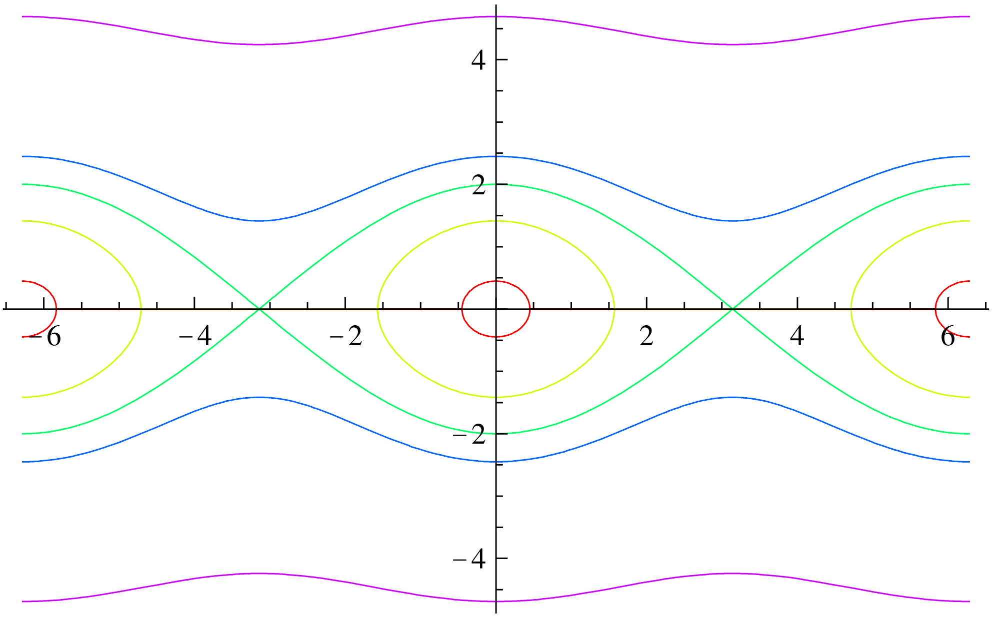

Figura 5.59.: Alcune possibili traiettorie, corrispondenti a $C = -9/10$ (rossa), $C = 0$ (gialla) $C = 1$ (verde) $C = 2$ (blu) e (viola). L'asse orizzontale corrisponde a θ, quello verticale a ω e si è scelto $g/\ell = 1$.

Per determinare ω_0 si può imporre che l'energia cinetica iniziale sia esattamente uguale alla differenza tra energia potenziale in $\theta = \pi$ e $\theta = 0$, cioè

$$\frac{1}{2} m\ell^2\omega_0^2 = 2mg\ell$$

da cui

$$\omega_0^2 = \frac{4g}{\ell}$$

e quindi

$$C = \frac{g}{\ell}.$$

In altre parole la traiettoria vale

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(1+\cos\theta\right)}$$

che corrisponde alla curva verde in figura. Per calcolare il tempo necessario a raggiungere la posizione $\theta = \pi$ si può considerare l'equazione precedente come un'equazione differenziale. Scegliendo il segno positivo abbiamo

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(1+\cos\theta\right)} = \sqrt{\frac{4g}{\ell}\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

ma possiamo separare le variabili e integrare, ottenendo

$$\sqrt{\frac{4g}{\ell}}\int_0^t dt = \int_0^{\theta^*}\frac{d\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}\,.$$

Il membro destro è proporzionale al tempo impiegato per arrivare a $\theta^\star$, ma è evidente che il membro sinistro tende a $+\infty$ quando θ^* tende a π. In questo caso particolare è possibile integrare esplicitamente anche il secondo membro. Si ottiene

$$\sqrt{\frac{4g}{\ell}}t = 4\,\mathrm{arctanh}\left(\tan\frac{\theta(t)}{4}\right)$$

oppure

$$\tan\frac{\theta(t)}{4} = \tanh\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\,.$$

L'angolo in funzione del tempo è rappresentato in Figura 5.60.

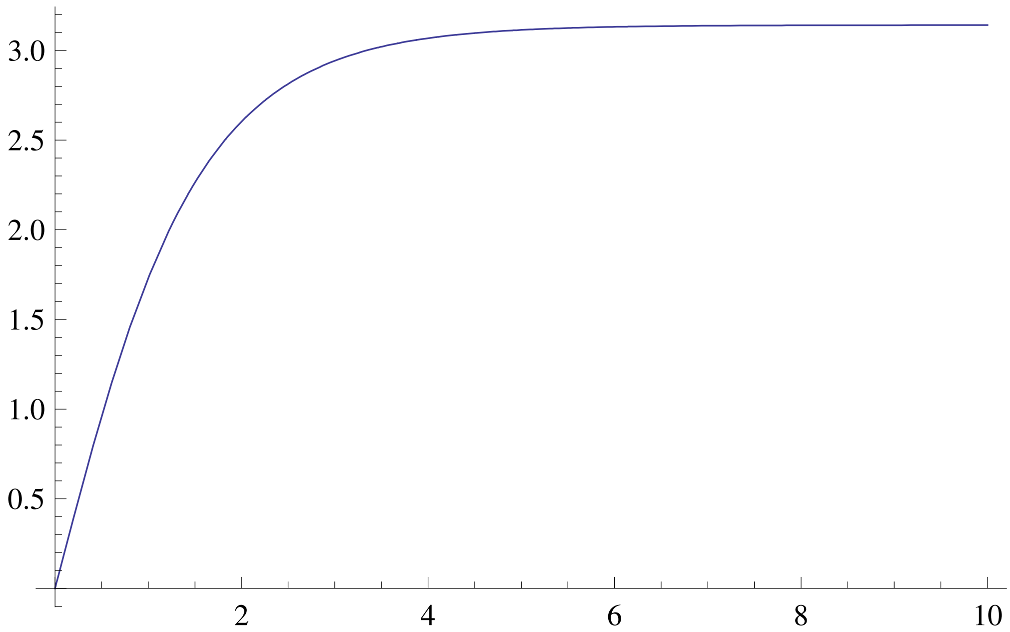

Figura 5.60.: La legge oraria $\theta(t)$ nel caso particolare considerato nella terza domanda.