PROBLEMA 5.76

Moto su una guida ellittica ⋆⋆

Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi nel piano su una guida ellittica descritta dalle equazioni parametriche

$$x = a\cos\theta$$
$$y = b\sin\theta$$

con velocità iniziale v_0.

Determinare la reazione vincolare della guida in funzione di θ, e il raggio di curvatura della traiettoria. Discutere il caso particolare $a = b = R$.

Soluzione

Dato che in assenza di attrito la guida non può esercitare forze nella direzione tangente il modulo della velocità si conserva e quindi vale sempre v_0. Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -a\dot{\theta}\sin\theta\\ \dot{y} &= b\dot{\theta}\cos\theta\end{aligned}$$

da cui ricaviamo il versore tangente alla traiettoria:

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}\begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \end{pmatrix}$$

e inoltre

$$v_0^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\theta}^2\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right) \tag{5.76.1}$$

Il vettore velocità si può scrivere nella forma $\vec{v} = v_0\hat{\tau}$. Possiamo allora calcolare l'accelerazione:

$$\vec{a} = v_0\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{v_0\dot{\theta}}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}\left[\begin{pmatrix} -a\cos\theta \\ -b\sin\theta \end{pmatrix} - \frac{\left(a^2-b^2\right)\sin\theta\cos\theta}{\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)}\begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \end{pmatrix}\right]$$

Svolgendo i calcoli e utilizzando l'equazione (5.76.1) troviamo

$$\vec{N} = m\vec{a} = -\frac{mabv_0^2}{\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)^2}\begin{pmatrix} b\cos\theta \\ a\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Notare che l'accelerazione è normale alla traiettoria: $\vec{N}\cdot\hat{\tau} = 0$, possiamo quindi estrarre dall'espressione precedente il versore normale:

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}\begin{pmatrix} b\cos\theta \\ a\sin\theta \end{pmatrix}$$

e scrivere

$$\vec{N} = -\frac{mabv_0^2}{\left(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta\right)^{3/2}}\hat{n}\,.$$

Confrontando con l'espressione dell'accelerazione normale in termini del raggio di curvatura, v_0^2/ρ, troviamo

$$\rho = \frac{\left(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta\right)^{3/2}}{ab}\,.$$

Utilizzando coordinate polari possiamo trovare la componente radiale della reazione vincolare:

$$N_r = \vec{N}\cdot\hat{e}_r = -\frac{mabv_0^2\left(b\cos^2\theta + a\sin^2\theta\right)}{\left(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta\right)^2}$$

e la componente diretta come $\hat{e}_\theta$:

$$N_\theta = \vec{N}\cdot\hat{e}_\theta = -\frac{mabv_0^2\,(b-a)\sin\theta\cos\theta}{\left(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta\right)^2}\,.$$

Il caso particolare $a = b = R$ corrisponde a una guida circolare di raggio R. Abbiamo

$$\vec{N} = -\frac{mv_0^2}{R}\hat{e}_r$$

e

$$\rho = R\,.$$