PROBLEMA 5.77

Macchina di Atwood: effetti della massa del filo ⋆⋆⋆

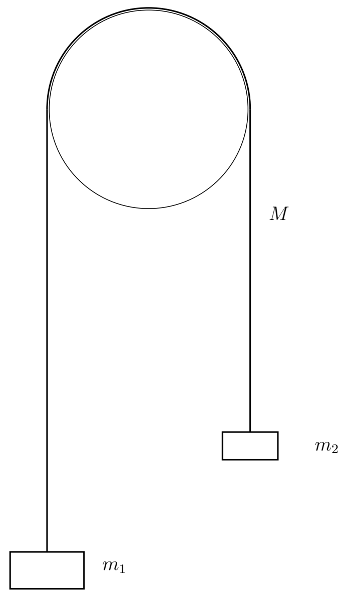

Figura 5.61.: Il sistema considerato nel problema.

Nella macchina di Atwood in Figura 5.61 il filo è inestensibile, ma di massa M non trascurabile. Non vi sono attriti. Si vuole determinare il moto del sistema.

Soluzione

Data l'inestensibilità del filo, il modulo della accelerazione delle masse e di ciascun elemento del filo sarà lo stesso. Possiamo allora scrivere

$$m_1 a = T_1 - m_1 g \tag{5.77.1}$$

e

$$-m_2 a = T_2 - m_2 g \tag{5.77.2}$$

dove e T_2 sono le tensioni del filo alle masse.

Consideriamo adesso un tratto infinitesimo del filo: avremo

$$\mu d\ell \vec{a}(\ell) = -\mu d\ell g \hat{y} + T\left(\ell + d\ell\right)\hat{\tau}\left(\ell + d\ell\right) - T(\ell)\hat{\tau}(\ell) + N\left(\ell\right)\hat{n}(\ell) d\ell \tag{5.77.3}$$

dove $\mu = M/L$, e abbiamo parametrizzato con ℓ la posizione lungo il filo ($\ell = 0$ corrisponde alla connessione con la massa m_1, $\ell = L$ alla connessione con la massa m_2). Il versore $\hat{\tau}$ è tangente al filo nel punto considerato, quello $\hat{n}$ è normale. Inoltre

N rappresenta la reazione normale della carrucola. Sviluppando al primo ordine in $d\ell$ otteniamo

$$\mu\left[a\hat{\tau}(\ell)-\frac{v^2}{\rho}\hat{n}(\ell)\right]=-\mu g\hat{y}+N(\ell)\hat{n}(\ell)+\frac{d}{d\ell}\left[T(\ell)\hat{\tau}(\ell)\right]. \tag{5.77.4}$$

Notare che abbiamo scomposto l'accelerazione del filo in componenti tangenti e normali, e che il raggio di curvatura del filo vale $\rho = R$ sulla carrucola e $\rho = \infty$ nei tratti rettilinei. Sviluppando la derivata e ricordando che

$$\frac{d\hat{\tau}}{d\ell}=-\frac{1}{\rho}\hat{n} \tag{5.77.5}$$

otteniamo

$$\mu\left[a\hat{\tau}(\ell)-\frac{v^2}{\rho}\hat{n}(\ell)\right]=-\mu g\hat{y}+N(\ell)\hat{n}(\ell)+\frac{dT(\ell)}{d\ell}\hat{\tau}(\ell)-\frac{1}{\rho}T(\ell)\hat{n}(\ell). \tag{5.77.6}$$

Prendendo il prodotto scalare con $\hat{\tau}$ di ambo i membri otteniamo

$$\mu a=-\mu g\hat{y}\cdot\hat{\tau}+\frac{dT(\ell)}{d\ell} \tag{5.77.7}$$

che integrata tra gli estremi da

$$T_2-T_1=\mu aL+\mu g\int_0^L \hat{y}\cdot\hat{\tau}d\ell. \tag{5.77.8}$$

Il tratto che si avvolge sulla carrucola non contribuisce all'ultimo integrale, che si riduce quindi a

$$T_2-T_1=\mu aL+\mu g\left(\ell_1-\ell_2\right) \tag{5.77.9}$$

dove ℓ_1 e ℓ_2 sono le lunghezze dei tratti verticali del filo.

Questa è l'ultima equazione che ci serviva. Dalle prime due che abbiamo scritto otteniamo

$$(m_1+m_2)a=T_1-T_2+\left(m_2-m_1\right)g \tag{5.77.10}$$

e quindi

$$a=\frac{m_2+\mu\ell_2-m_1-\mu\ell_1}{(m_1+m_2+M)}g. \tag{5.77.11}$$

Teniamo conto adesso del fatto che

$$L=\ell_1+\ell_2+\pi R \tag{5.77.12}$$

e che

$$\ddot{\ell}_2=a. \tag{5.77.13}$$

Abbiamo quindi

$$\ddot{\ell}_2-\frac{2\mu g}{(m_1+m_2+M)}\ell_2=\frac{m_2-m_1-\mu\left(L-\pi R\right)}{(m_1+m_2+M)}g. \tag{5.77.14}$$

Questa equazione ammette come soluzione particolare

$$\ell_2 = \ell_{2,0} = \frac{m_1 - m_2 + M\left(1 - \pi\frac{R}{L}\right)}{2M}L \tag{5.77.15}$$

che rappresenta una configurazione di equilibrio. La soluzione generale dell'equazione omogenea

$$\ddot{\ell}_2 - \frac{2\mu g}{(m_1 + m_2 + M)}\ell_2 = 0 \tag{5.77.16}$$

è invece

$$\ell_2(t) = Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t} \tag{5.77.17}$$

con

$$\gamma = \sqrt{\frac{2\mu g}{m_1 + m_2 + M}} \tag{5.77.18}$$

La soluzione generale sarà quindi

$$\ell_2(t) = A' \cosh \gamma t + B' \sinh \gamma t + \frac{m_1 - m_2 + M\left(1 - \pi\frac{R}{L}\right)}{2M} \tag{5.77.19}$$

In termini delle condizioni al contorno

$$\ell_2(0) = A' + \frac{m_1 - m_2 + M\left(1 - \pi\frac{R}{L}\right)}{2M} \tag{5.77.20}$$

$$\dot{\ell}_2(0) = \gamma B' \tag{5.77.21}$$

e quindi

$$\ell_2(t) = \left(\ell_2(0) - \frac{m_1 - m_2 + M\left(1 - \pi\frac{R}{L}\right)}{2M}\right)\cosh \gamma t + \frac{\dot{\ell}_2(0)}{\gamma}\sinh \gamma t + \frac{m_1 - m_2 + M\left(1 - \pi\frac{R}{L}\right)}{2M}$$