PROBLEMA 5.78

Pendolo invertito ⋆⋆

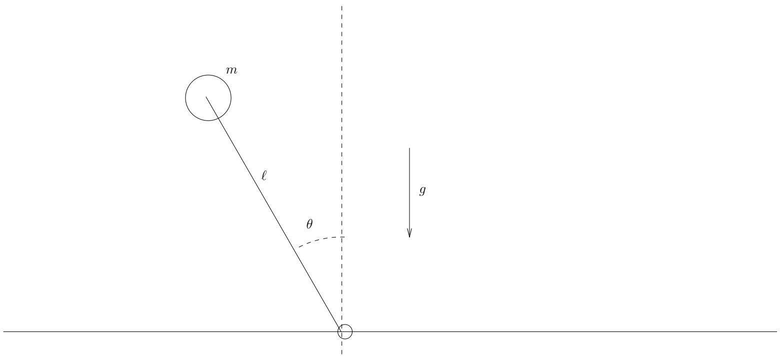

Figura 5.62.: Rappresentazione schematica di un pendolo invertito.

Il pendolo invertito in Figura 5.62 è costituito da una massa m fissata su un'asta di lunghezza ℓ e massa trascurabile. L'asta può ruotare attorno all'altro estremo, ma è soggetta ad un momento proporzionale alla sua deviazione dalla verticale,

$$M = -k\theta \,. \tag{5.78.1}$$

Determinare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità, in funzione dei parametri dati.

Soluzione

Scelta come coordinata l'angolo θ, la seconda equazione cardinale

$$\frac{dL}{dt} = M \tag{5.78.2}$$

per la componente del momento angolare ortogonale al piano della figura si può scrivere

$$\frac{d}{dt} m\ell^2\dot{\theta} = -k\theta + mg\ell\sin\theta \tag{5.78.3}$$

ossia

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{\ell}\left(\sin\theta - \frac{k}{mg\ell}\theta\right)$$

Le posizioni di equilibrio corrispondono ai valori di θ per i quali l'espressione tra parentesi si annulla. Possiamo determinarle graficamente studiando le intersezioni tra le curve

$$y = \sin\theta \tag{5.78.4}$$

$$y = q\theta \tag{5.78.5}$$

al variare del parametro adimensionale

$$q = \frac{k}{mg\ell}, \tag{5.78.6}$$

con $q \geq 0$. Per qualsiasi valore di q abbiamo la soluzione $\theta = 0$. Per determinare la stabilità di questa configurazione di equilibrio possiamo sviluppare l'equazione del moto attorno al primo ordine intorno ad essa, $\sin\theta \simeq \theta$, ottenendo

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{\ell}(1-q)\,\theta \tag{5.78.7}$$

che corrisponde ad un oscillatore stabile solo quando $q > 1$.

Per $q > 1$ la posizione di equilibrio trovata è anche l'unica. Al diminuire di q sono possibili altre intersezioni, come evidente dalla Figura 5.63, che corrisponde al caso $q = 1/9$.

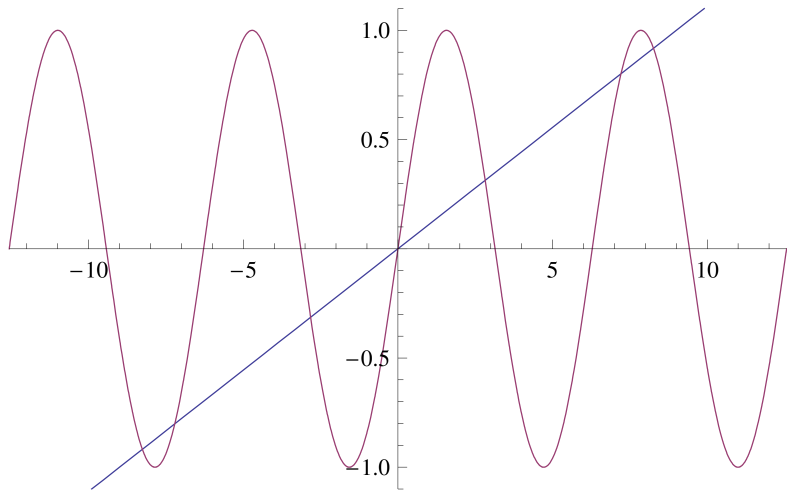

Figura 5.63.: Studio grafico delle posizioni di equilibrio e della loro stabilità. Le curve (5.78.4) e (5.78.5) sono rappresentate in funzione di θ, per $q = 1/9$.

Possiamo determinare direttamente da un grafico di questo tipo la stabilità di una posizione di equilibrio. Infatti il segno del momento applicato al sistema è dato dalla differenza tra la sinusoide e la retta. In figura, l'intersezione per $\theta = 0$ corrisponde a equilibrio instabile, le successive per $\theta > 0$ si alternano tra stabili e instabili.

Possiamo riassumere le conclusioni nel grafico 5.64. Sulle ordinate abbiamo il valore di θ all'equilibrio, sulle ascisse q.

Da notare che le 4 più lontane corrispondono a una configurazione nella quale $|\theta| > 2\pi$.

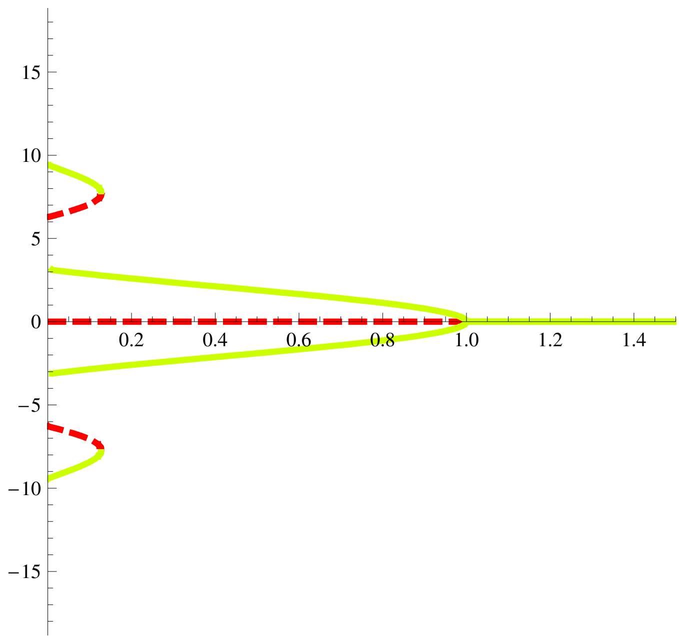

Figura 5.64.: Posizioni di equilibrio θ e loro stabilità, in funzione di q. La linea continua corrisponde all'equilibrio stabile, quella tratteggiata all'equilibrio instabile. Sono rappresentate solo le 7 posizioni di equilibrio più vicine a $\theta = 0$.