PROBLEMA 5.79

Urto con un piano inclinato ⋆⋆

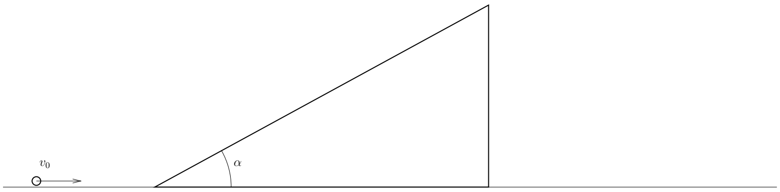

Figura 5.65.: Il piano inclinato mobile e la pallina che lo urta.

Il piano inclinato in Figura 5.65, di massa M, è vincolato a muoversi su un piano orizzontale privo di attrito. Su di esso viene lanciata una pallina di massa m che si muove inizialmente nel piano con velocità v_0, e non è ad esso vincolata. Calcolare l'angolo θ che la velocità della pallina forma con l'orizzontale dopo l'urto, tenendo conto del fatto che la giunzione tra piano inclinato e piano orizzontale non è arrotondata e che l'urto avviene in un tempo molto breve.

Soluzione

L'energia e la quantità di moto orizzontale del sistema si conservano. Inoltre, dato che l'urto avviene in un tempo molto breve, l'unica forza non trascurabile applicata alla pallina è la reazione normale alla superficie del piano inclinato. Durante l'urto quindi si conserverà la componente della quantità di moto della pallina parallela al piano inclinato.

Abbiamo quindi la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) + \frac{1}{2}MV^2 \tag{5.79.1}$$

dove si è tenuto conto che immediatamente dopo l'urto la posizione della pallina non è cambiata, e che quindi non è necessario includere l'energia potenziale gravitazionale. Per la conservazione della quantità di moto orizzontale sarà

$$mv_0 = mv_x + MV \tag{5.79.2}$$

ed infine per la componente della quantità di moto della pallina parallela al piano inclinato

$$mv_0\cos\alpha = m\left(v_x\cos\alpha + v_y\sin\alpha\right) . \tag{5.79.3}$$

Ricavando V dalla seconda relazione abbiamo ($\gamma = M/m$)

$$v_0^2 = v_x^2 + v_y^2 + \frac{1}{\gamma}(v_0 - v_x)^2 \tag{5.79.4}$$

$$v_0 = v_x + v_y\tan\alpha \tag{5.79.5}$$

CC BY NC SA

ossia

$$\left(v_x + v_y \tan\alpha\right)^2 = v_x^2 + v_y^2 + \frac{1}{\gamma} v_y^2 \tan^2\alpha \,. \tag{5.79.6}$$

Risolvendo per $\tan\theta = v_y/v_x$ otteniamo le due soluzioni

$$\tan\theta = 0 \tag{5.79.7}$$

e

$$\tan\theta = \frac{2\tan\alpha}{1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\tan^2\alpha} \,. \tag{5.79.8}$$

Solo quest'ultima è fisicamente accettabile. Nel caso particolare da considerare $\gamma \to \infty$, e quindi

$$\tan\theta \to \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \tan 2\alpha \tag{5.79.9}$$

cioè l'angolo di incidenza con il piano inclinato è uguale a quello di riflessione, come ci si aspetta se la pedana è ferma.