PROBLEMA 5.80

Urto di un manubrio ⋆⋆

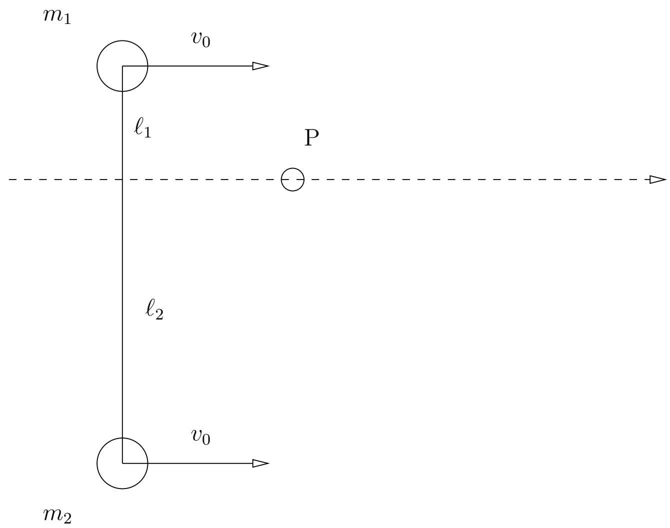

Figura 5.66.: Il manubrio considerato nell'esercizio e il perno P contro il quale urta.

Il manubrio in Figura 5.66 è costituito da due masse puntiformi m_1 e m_2, unite da una barra di lunghezza $\ell = \ell_1 + \ell_2$ di massa trascurabile. Inizialmente si muove traslando rigidamente con velocità v_0, urta quindi un perno P posto a una distanza ℓ_1 dalla massa superiore, e vi rimane attaccato, libero però di ruotare. Calcolare la velocità angolare finale del manubrio e l'energia dissipata nell'urto.

Soluzione

Vale la conservazione del momento angolare $\vec{L}$ rispetto al perno, dato che le uniche forze esterne sono applicate in esso al manubrio, e quindi hanno braccio nullo. Consideriamo in particolare la componente di $\vec{L}$ normale al piano in cui si muove il manubrio. Inizialmente questa vale

$$-m_1 v_0 \ell_1 + m_2 v_0 \ell_2 \tag{5.80.1}$$

ed alla fine

$$m_1 \omega \ell_1^2 + m_2 \omega \ell_2^2 \tag{5.80.2}$$

dove ω è la velocità angolare finale. Equagliando queste due espressioni si ottiene

$$\omega = \frac{(m_2\ell_2 - m_1\ell_1)v_0}{m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2}\,. \tag{5.80.3}$$

Quindi il manubrio ruoterà in senso antiorario se $m_2\ell_2 > m_1\ell_1$, in senso orario se $m_2\ell_2 < m_1\ell_1$ e non ruoterà affatto se $m_1\ell_1 = m_2\ell_2$. Queste alternative corrispondono ad un urto del perno sopra, sotto o in corrispondenza del centro di massa del manubrio. L'energia dissipata si calcola come differenza tra energia cinetica iniziale e finale:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v_0^2 - \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \omega^2 - \frac{1}{2} m_2 \ell_2^2 \omega^2 \tag{5.80.4}$$

ossia,

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v_0^2 - \frac{1}{2}\frac{\left(m_2\ell_2 - m_1\ell_1\right)^2}{\left(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2\right)} v_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{\left(m_1 + m_2\right)\left(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2\right) - \left(m_2\ell_2 - m_1\ell_1\right)^2}{\left(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2\right)} v_0^2\end{aligned}$$

ed infine

$$\Delta E = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2 \left(\ell_1 + \ell_2\right)^2}{\left(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2\right)} v_0^2 . \tag{5.80.5}$$