PROBLEMA 5.81

Il grande attrattore ⋆⋆⋆

Supponiamo di avere a disposizione una massa di plastilina: possiamo modellarla nella forma voluta, ma non possiamo cambiare la sua densità ρ. Vogliamo capire che forma dobbiamo dargli per rendere massima l'attrazione gravitazionale esercitata su un punto materiale di massa m.

Soluzione

Poniamo il punto materiale nell'origine di un sistema di coordinate. Qualunque sia la soluzione del problema, con una rotazione del sistema potremo allineare la forza attrattiva totale con l'asse z. Da questo segue che un elemento dM della massa di plastilina posto nalle posizione $\vec{r}$ darà un contributo utile alla forza totale uguale a

$$dF_z = -G\frac{mdM}{r^3}\vec{r}\cdot\hat{z}$$

dato che la somma di tutte le componenti perpendicolari a $\hat{z}$ si dovrà annullare. Usando coordinate sferiche questo significa

$$dF_z = -G\frac{mdM}{r^2}\cos\theta$$

Possiamo spostare l'elemento dM mantenendo dF_z costante se ci muoviamo sulla superficie

$$r^2 = -K\cos\theta$$

dove K è una costante definita da

$$K^{-1} = \frac{1}{Gm}\frac{dF_z}{dM}$$

Chiaramente K^{-1} è proporzionale all'importanza del contributo di dM. Al variare di K avremo diverse superfici, invarianti per rotazioni attorno all'asse z. Alcune di queste sono rappresentate in Figura 5.67.

Avendo a disposizione una massa M totale converrà iniziare a riempire le superfici a K più piccolo (ma positivo). Per determinare il valore di K corrispondente alla superficie più grande completamente riempita basterà imporre che la massa totale in essa contenuta sia quella a disposizione, cioè

$$\rho\int dV = M$$

ossia

$$\rho\int\int\int r^2 dr d\cos\theta d\phi = M$$

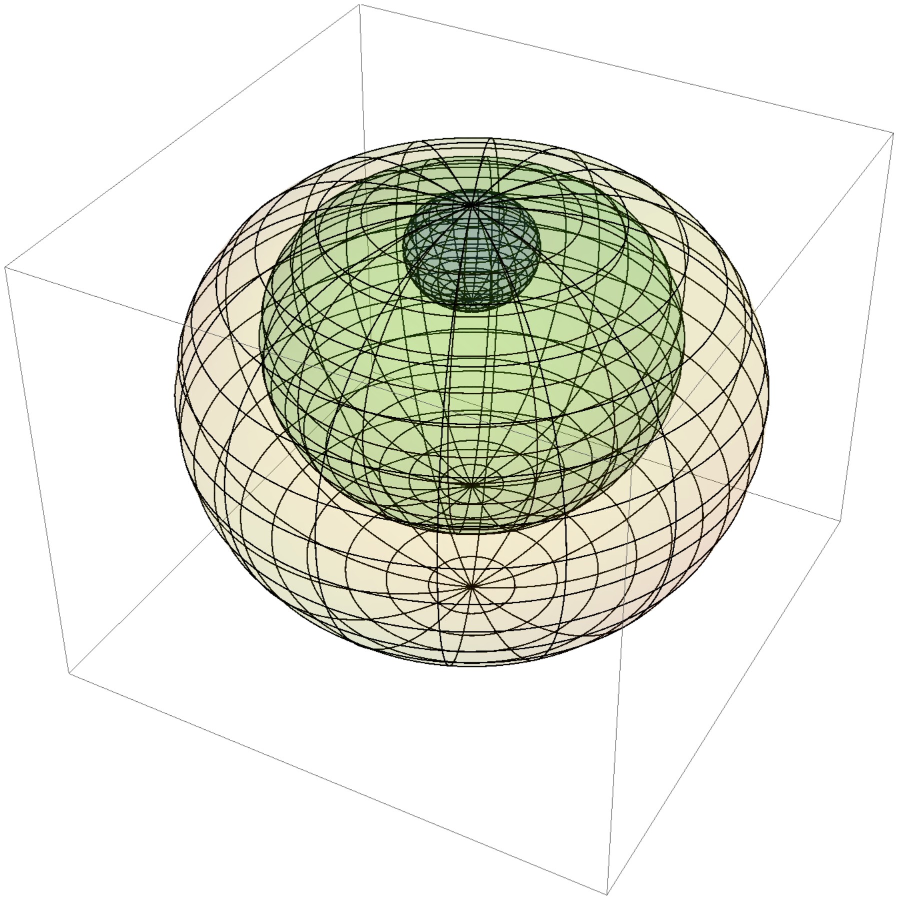

Figura 5.67.: Le superfici $r^2 = -K\cos\theta$. Dalla più piccola alla più grande corrispondono a $K = 1/10, 1, 2$. L'origine del sistema di riferimento è nel punto in comune.

Integriamo su ϕ e scriviamo esplicitamente i limiti di integrazione di quanto resta

$$2\pi\rho \int_{-1}^{0} d\cos\theta \int_{0}^{\sqrt{-K\cos\theta}} dr\, r^2 = M$$

da cui

$$\frac{4}{15}\pi\rho K^{3/2} = M$$

Otteniamo infine che K scala come la potenza $2/3$ del volume della plastilina

$$K = \left(\frac{15M}{4\pi\rho}\right)^{2/3} = \left(\frac{15V}{4\pi}\right)^{2/3}$$

Possiamo infine calcolare la forza attrattiva ottenuta, scrivendo

$$\begin{aligned}
F_z &= -Gm\int\frac{dM}{r^2}\cos\theta \\
&= -Gm\rho\int\frac{\cos\theta}{r^2}r^2 dr d\cos\theta d\phi \\
&= -2\pi Gm\rho\int_{-1}^{0}\cos\theta d\cos\theta\int_0^{\sqrt{-K\cos\theta}} dr \\
&= \frac{4\pi}{5}Gm\rho\sqrt{K} \\
&= \frac{4\pi G}{5}m\rho\left(\frac{15V}{4\pi}\right)^{1/3}
\end{aligned}$$

Possiamo confrontare questo risultato con ciò che si otterrebbe con una distribuzione sferica di plastilina,

$$F_z = \frac{GmM}{R^2} = \frac{4\pi G}{5}m\rho\left(\frac{V}{4\pi}\frac{125}{9}\right)^{1/3}$$

che risulta minore di un fattore $(25/27)^{1/3} \simeq 0.97$. Per maggiore chiarezza riportiamo in Figura 5.68 le sezioni trasversali delle superfici.

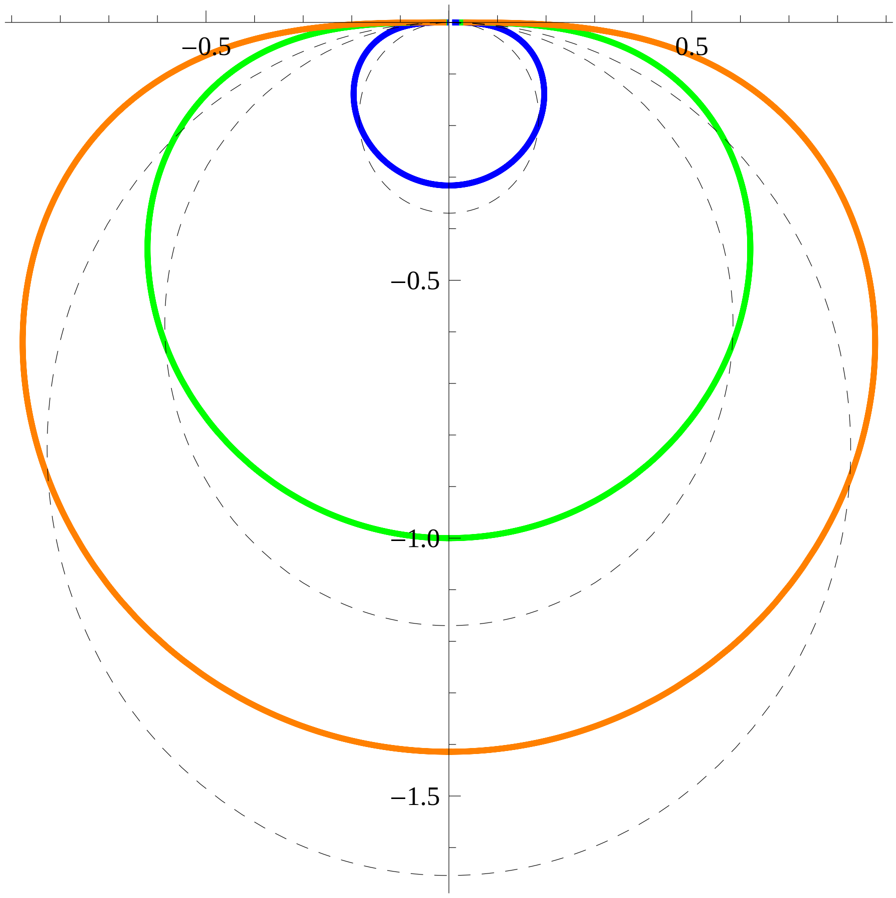

Figura 5.68.: Le sezioni trasverse delle superfici riportate in Figura 5.67 per $K = 1/10$ (blu), $K = 1$ (verde) e $K = 10$ (arancio). Le linee tratteggiate corrispondono alle sfere di uguale volume.