PROBLEMA 5.82

Razzo in un campo gravitazionale costante ⋆⋆

Studiare il moto di un razzo in un campo gravitazionale costante. La massa iniziale del missile è M_0. Il sistema di propulsione emette una massa costante di gas Γ per unità di tempo, ad una velocità $-u$ relativa al razzo. Determinare in particolare sotto quali condizioni il razzo riesce a sollevarsi da terra.

Soluzione

La quantità di moto del sistema al tempo t, escludendo il gas espulso fino a quell'istante, è

$$P(t) = M(t)V(t)$$

La quantità di moto al tempo $t + dt$ vale invece, tenendo conto del gas espulso tra t e $t + dt$,

$$P(t + dt) = [M(t) - \Gamma(t)dt]\, V(t + dt) + [-u + V(t)]\, \Gamma(t)dt$$

dove abbiamo considerato una massa espulsa per unità di tempo $\Gamma = -\dot{M}$ non necessariamente costante. La variazione della quantità di moto è uguale all'impulso delle forze esterne

$$P(t + dt) - P(t) = -M(t)gdt$$

da cui

$$[M(t) - \Gamma(t)dt]\left[V(t) + \dot{V}(t)dt\right] + [-u + V(t)]\,\Gamma(t)dt - M(t)V(t) = -M(t)gdt$$

Sviluppando e omettendo i termini del secondo ordine si ottiene

$$M(t)\dot{V}(t) = \Gamma(t)u - M(t)g$$

Vediamo che il razzo si solleverà dal suolo se

$$\Gamma(0)u > M_0 g$$

Passiamo adesso all'integrazione delle equazioni del moto. Abbiamo

$$\frac{dV}{dt} = \frac{u\Gamma(t)}{M_0 - \int_0^t \Gamma(t')dt'} - g$$

ed integrando otteniamo

$$V(t) = \int_0^t \frac{u\Gamma(t')}{M_0 - \int_0^{t'} \Gamma(t'')dt'} dt' - gt$$

che posto di conoscere $\Gamma(t)$ e di saper calcolare gli integrali al membro destro da una 1soluzione completa del problema. Considerando Γ costante in particolare abbiamo

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_0^t \frac{u\Gamma}{M_0 - \Gamma t'} dt' - gt \\ &= -u \log\left(1 - \frac{\Gamma t}{M_0}\right) - gt \end{aligned}$$