PROBLEMA 5.86

Massima forza di marea ⋆⋆⋆

Avendo a disposizione un volume V della stessa plastilina di densità ρ del problema 5.81 la si vuole disporre, questa volta, in modo da rendere massima la variazione

$$\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

in un punto dato, dove F_z indica la componente z della forza attrattiva generata dalla plastilina. Una possibile applicazione è una versione scientificamente avanzata del banco di stiramento in Figura 5.71.

Figura 5.71.: Il banco di stiramento, uno strumento di tortura usato nel medio evo, ma di origini ben più antiche.

Determinare la forma da dare alla plastilina, e stimare la massa necessaria a rendere l'apparato utile al suo scopo, considerando $\rho = 10^3 \mathrm{kg\,m^{-3}}$. Conviene utilizzare un materiale più o meno denso?

Soluzione

Immaginiamo una massa m all'origine di un sistema di coordinate. La forza che una massa dM posta in $\vec{r}$ esercita su di essa sarà

$$\vec{F} = \frac{GmdM}{r^3}\vec{r}$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
F_z &= \frac{GmdM}{r^3} z \\
\frac{\partial F_z}{\partial z} &= GmdM \left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{z^2}{r^5} \right)
\end{aligned}
$$

Esprimiamo quest'ultima quantità in coordinate sferiche:

$$
\frac{\partial F_z}{\partial z} = GmdM \left(\frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^3} \right)
$$

Analogamente a quanto visto nell'esercizio 5.81 il contributo della massa dM a $\partial F_z / \partial z$ sarà lo stesso per tutti i punti appartenenti alla superficie

$$
r^3 = K \left(1 - 3\cos^2\theta \right)
$$

dove

$$
K = GmdM \left(\frac{\partial F_z}{\partial z} \right)^{-1}
$$

è una costante tanto più piccola quanto maggiore è il contributo. Per rendere massimo $\partial F_z / \partial z$ dovremo determinare la superficie capace di contenere tutta la massa disponibile corrispondente al minimo valore positivo di K.

Notiamo che il massimo valore di $\partial F_z / \partial z$ corrisponde ad una azione di trazione esercitata sul corpo vicino all'origine (la testa a $z > 0$ viene spinta verso l'alto, i piedi a $z < 0$ verso il basso).

Per ottenere una compressione dobbiamo chiederci invece quale sia la configurazione corrispondente ad un $\partial F_z / \partial z$ massimo in valore assoluto ma negativo. In questo caso è sufficiente trovare la superficie capace di contenere tutta la massa disponibile corrispondente al valore di K più piccolo in valore assoluto, ma negativo. Il grafico per le superfici corrispondenti ad entrambi i casi (per $K = 1$ e $K = -1$) sono riportati in Figura 5.72.

Analogamente a quanto visto nell'esercizio 5.81 sommiamo i contributi di tutta la massa contenuta all'interno di una superficie data. Questo significa per $K > 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_z}{\partial z} &= Gm\rho \int \left(\frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^3} \right) dV \\
&= 2\pi Gm\rho \int d\cos\theta \int_0^{\left[K\left(1-3\cos^2\theta\right)\right]^{1/3}} dr \left(\frac{1 - 3\cos^2\theta}{r} \right) \\
&= 2\pi Gm\rho \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} d\cos\theta \left(1 - 3\cos^2\theta \right) \int_0^{\left[K\left(1-3\cos^2\theta\right)\right]^{1/3}} \frac{dr}{r}
\end{aligned}
$$

Una particolarità di questa espressione è che l'integrale sulla coordinata radiale è divergente. Il significato di tutto questo è che il contributo della massa vicina a $r = 0$ è

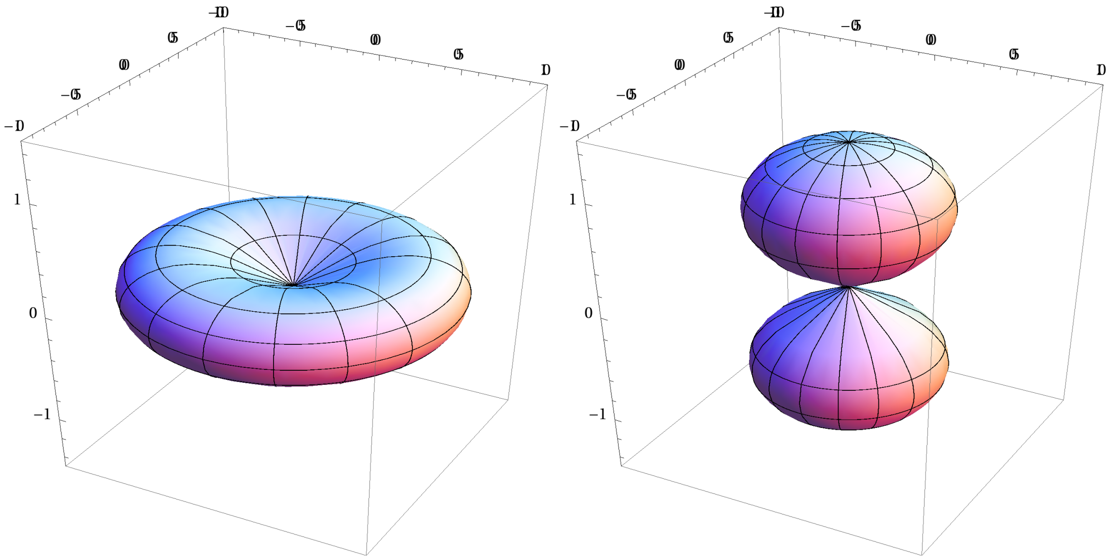

Figura 5.72.: A sinistra, la distribuzione di massa che rende massimo e positivo $\partial F_z/\partial z$ nell'origine. A destra, la distribuzione che rende massimo in valore assoluto ma negativo $\partial F_z/\partial z$. La prima superficie corrisponde a $K = 1$, la seconda a $K = -1$.

dominante, e questo permette di ottenere un valore grande quanto vogliamo di $\partial F_z/\partial z$ con qualsiasi massa a disposizione. Sembra quindi che sia possibile costruire un banco di stiramento estremamente efficace a poco prezzo. In realtà è chiaro che in pratica questo non funziona: per un utilizzo pratico abbiamo bisogno di una regione sufficientemente ampia priva di massa in cui alloggiare il torturato. Quindi l'integrale precedente deve essere modificato in

$$\frac{\partial F_z}{\partial z} = 2\pi G m\rho \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} d\cos\theta \left(1 - 3\cos^2\theta\right) \int_{r_{min}}^{\left[K\left(1-3\cos^2\theta\right)\right]^{1/3}} \frac{dr}{r}$$

che non è più divergente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_z}{\partial z} &= \frac{2\pi}{3} G m\rho \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} d\cos\theta \left(1 - 3\cos^2\theta\right) \log \frac{K\left(1 - 3\cos^2\theta\right)}{r_{min}^3} \\
&= \frac{8\pi}{9\sqrt{3}} G m\rho \left(\log \frac{4K}{r_{min}^3} - \frac{5}{3}\right)
\end{aligned}$$

Per calcolare K valutiamo il volume complessivo

$$
\begin{aligned}
V &= \int d\phi \int d\cos\theta \int r^2 dr \\
&= 2\pi \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} d\cos\theta \int_{r_{min}}^{\left[K\left(1-3\cos^2\theta\right)\right]^{1/3}} r^2 dr \\
&= \frac{2\pi}{3} \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \left[K\left(1-3\cos^2\theta\right) - r_{min}^3\right] d\cos\theta \\
&= \frac{8\pi}{9\sqrt{3}} K - \frac{4\pi r_{min}^3}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

da cui

$$
K = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} V + \frac{3}{2} r_{min}^3 \simeq \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} V
$$

Per ottenere un banco efficace dovremo avere

$$
\frac{\partial F_z}{\partial z} r_{min} > mg
$$

e quindi

$$
\frac{G\rho r_{min}}{g} \left[\log\left(\frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \frac{V}{r_{min}^3} + 6\right) - \frac{5}{3}\right] > \frac{9\sqrt{3}}{8\pi}
$$

Dato che il fattore

$$
\alpha = \frac{G\rho r_{min}}{g} \simeq 7 \times 10^{-9} \left(\frac{\rho}{10^3 \text{kg}\,\text{m}^{-3}}\right)\left(\frac{r_{min}}{1\text{m}}\right)
$$

è molto piccolo, è chiaro che per ottenere il risultato voluto dovremo avere un volume totale enormemente più grande di r_{min}^3, dato che il logaritmo dovrà essere $O\left(\alpha^{-1}\right)$, quindi il dispositivo è del tutto irrealizzabile. Aumentare la densità può aiutare: all'interno di una stella di neutroni $\rho \simeq 10^{18} \text{kg}\,\text{m}^{-3}$ e quindi $\alpha \simeq 7 \times 10^6$. In questo caso, supponendo di poter applicare l'espressione per la forza gravitazionale di Newton, sarebbe sufficiente avere

$$
V \gtrsim 2 r_{min}^3
$$

Considerazioni analoghe si possono fare nel caso $K < 1$.