PROBLEMA 5.87

Pendolo non ideale ⋆⋆

Un punto materiale di massa m è sospeso ad un punto fisso da una molla con lunghezza di riposo ℓ_0 e costante elastica k. Per semplicità si può supporre che il moto avvenga in un piano verticale. Studiare le piccole oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio stabile.

Soluzione

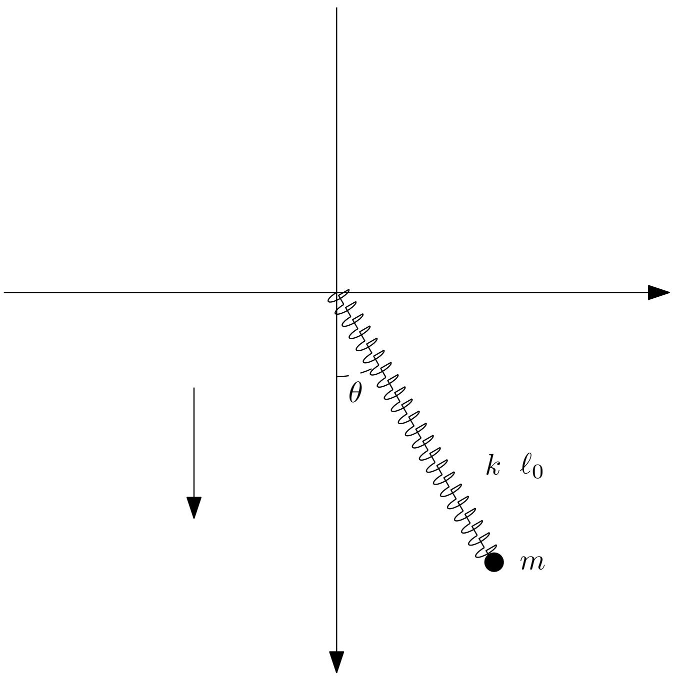

Figura 5.73.: Coordinate polari utilizzate per descrivere il pendolo.

Conviene utilizzare coordinate polari per specificare la posizione del punto materiale rispetto all'origine. L'estremo opposto della molla è fissato in quest'ultima (Figura 5.73). Possiamo allora scrivere le equazioni del moto nella direzione radiale e tangenziale nella forma

$$m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right) = mg\cos\theta - k\left(r-\ell_0\right) \tag{5.87.1}$$

$$m\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right) = -mg\sin\theta \tag{5.87.2}$$

La posizione di equilibrio si trova annullando nelle equazioni precedenti velocità e accelerazioni. Deve quindi essere

$$\sin\theta = 0 \tag{5.87.3}$$

$$\cos\theta = \frac{k}{mg}(r-\ell_0) \tag{5.87.4}$$

e troviamo le due soluzioni

$$(r,\theta) = \left(\ell_0 - \frac{mg}{k}, \pi\right) \tag{5.87.5}$$

e

$$(r,\theta) = \left(\ell_0 + \frac{mg}{k}, 0\right) \tag{5.87.6}$$

Studiamo piccole oscillazioni attorno alla prima introducendo due nuove coordinate

$$\theta = \pi + \delta\theta \tag{5.87.7}$$

$$r = \ell_0 - \frac{mg}{k} + \delta r \tag{5.87.8}$$

legate agli spostamenti rispetto alla posizione di equilibrio scelta. Sostituendo nelle equazioni del moto abbiamo

$$m\left[\delta\ddot{r} - \left(\ell_0 - \frac{mg}{k} + \delta r\right)\delta\dot{\theta}^2\right] = mg\cos(\pi+\delta\theta) - k\left(\ell_0 - \frac{mg}{k} + \delta r - \ell_0\right) \tag{5.87.9}$$

$$m\left[\left(\ell_0 - \frac{mg}{k} + \delta r\right)\delta\ddot{\theta} + 2\delta\dot{r}\delta\dot{\theta}\right] = -mg\sin(\pi+\delta\theta) \tag{5.87.10}$$

Trascurando tutte le quantità di ordine maggiore del primo rispetto alle piccole variazioni e utilizzando le approssimazioni $\sin(\pi+\delta\theta) \simeq -\delta\theta$ e $\cos(\pi+\delta\theta) \simeq -1$ otteniamo

$$m\delta\ddot{r} = -k\delta r \tag{5.87.11}$$

$$m\left(\ell_0 - \frac{mg}{k}\right)\delta\ddot{\theta} = mg\delta\theta \tag{5.87.12}$$

La seconda equazione non corrisponde a piccole oscillazioni se, come supporremo, $\ell_0 > mg/k$. In effetti la sua soluzione generale è del tipo

$$\delta\theta(t) = Ae^{kt} + Be^{-kt} \tag{5.87.13}$$

con

$$k = \sqrt{\frac{g}{\ell_0 - \frac{mg}{k}}} \tag{5.87.14}$$

e questo permette di concludere che il punto di equilibrio studiato non è stabile.

Passiamo allora alla seconda soluzione di equilibrio. Questa volta le "piccole" coordinate saranno definite da

$$\theta = \delta\theta \tag{5.87.15}$$

$$r = \ell_0 + \frac{mg}{k} + \delta r \tag{5.87.16}$$

e sostituendo come nel caso precedente nelle equazioni del moto troviamo

$$
\begin{aligned}
m\left[\delta\ddot{r}-\left(\ell_0+\frac{mg}{k}+\delta r\right)\delta\dot{\theta}^2\right] &= mg\cos\left(\delta\theta\right)-k\left(\ell_0+\frac{mg}{k}+\delta r-\ell_0\right) && (5.87.17)\\
m\left[\left(\ell_0+\frac{mg}{k}+\delta r\right)\delta\ddot{\theta}+2\delta\dot{r}\delta\dot{\theta}\right] &= -mg\sin\left(\delta\theta\right) && (5.87.18)
\end{aligned}
$$

Questa volta utilizzeremo le approssimazioni $\sin\delta\theta \simeq \delta\theta$ e $\cos\delta\theta \simeq 1$. Trascurando nuovamente prodotti di quantità piccole avremo

$$
\begin{aligned}
m\delta\ddot{r} &= -k\delta r && (5.87.19)\\
m\left(\ell_0+\frac{mg}{k}\right)\delta\ddot{\theta} &= -mg\delta\theta && (5.87.20)
\end{aligned}
$$

Entrambe le equazioni descrivono oscillatori armonici, ed hanno per soluzioni generali

$$
\begin{aligned}
\delta r(t) &= A\cos\omega_r t+B\sin\omega_r t && (5.87.21)\\
\delta\theta(t) &= C\cos\omega_\theta t+D\sin\omega_\theta t && (5.87.22)
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
\omega_r &= \sqrt{\frac{k}{m}} && (5.87.23)\\
\omega_\theta &= \sqrt{\frac{g}{\ell_0+\frac{mg}{k}}} && (5.87.24)
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi una oscillazione radiale, la cui frequenza dipende dalla costante di richiamo della molla, e una oscillazione tangenziale. Per la seconda la frequenza è identica a quella di un pendolo di lunghezza $\ell = \ell_0 + \frac{mg}{k}$, cioè alla lunghezza della molla nella posizione di equilibrio.

Le due oscillazioni sono indipendenti, e nel limite $k \to \infty$, che ci aspettiamo corrisponda al caso di un filo inestensibile, la frequenza di oscillazione radiale tende pure all'infinito, mentre quella tangenziale diviene la frequenza di un pendolo di lunghezza ℓ_0.