PROBLEMA 5.88

Moto di una scodella ★★

Una scodella di massa M e sezione S può muoversi liberamente su un piano orizzontale senza attrito. Su di essa cade della pioggia: ciascuna goccia all'arrivo sulla scodella ha una velocità orizzontale $V_x > 0$ e una verticale $V_y < 0$. Inoltre la massa di acqua che arriva su una superficie S fissa sul terreno è costante e vale Γ.

Supponendo che la pioggia raccolta dalla scodella rimanga in quiete rispetto ad essa, e che questa si inizialmente ferma, studiarne il moto. Trascurare l'effetto dell'urto della pioggia sulle superfici laterali della scodella.

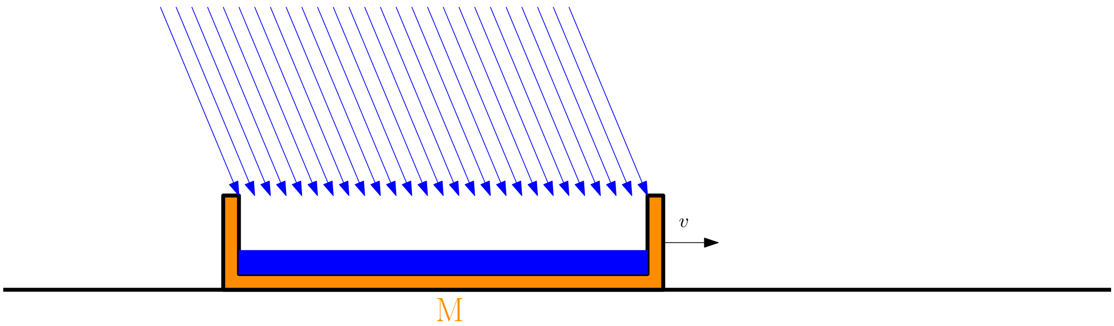

Figura 5.74.: La scodella ha una sezione orizzontale S, la pioggia cade su di essa con un angolo determinato dalle componenti orizzontali e verticali della velocità. Se la scodella è ferma, la massa di acqua raccolta in un'unità di tempo è costante e vale Γ.

Soluzione

Calcoliamo prima di tutto la massa di pioggia raccolta per unità di tempo da una scodella che si sta muovendo con velocità v. Questa è la massa contenuta nel cilindro rappresentato dall'insieme dei vettori in Figura 5.74, con base S e altezza uguale alla componente verticale della velocità della pioggia. Dato che quest'ultima non cambia al variare della velocità della scodella, otterremo ancora Γ.

Scriviamo la quantità di moto della scodella al tempo $t + dt$. Esso sarà dato da

$$P = (M + m(t + dt))\, v(t + dt)$$

dove $m(t + dt)$ è la pioggia raccolta a quell'istante. Al tempo t questa dovrà essere uguale alla quantità di moto della scodella più quella (orizzontale) della pioggia raccolta nell'intervallo dt successivo:

$$P = (M + m(t))\, v(t) + \Gamma V_x dt$$

Eguagliando queste due espressioni troviamo

$$(M + m(t))\, v(t) + \Gamma V_x dt = (M + m(t + dt))\, v(t + dt)$$

Usando il fatto che $m(t+dt) = m(t) + \Gamma dt$ possiamo scrivere

$$(M + m(t))\, v(t) + \Gamma V_x dt = (M + m(t) + \Gamma dt)\, (v(t) + \dot{v}(t) dt)$$

ossia, trascurando i termini di ordine superiore al primo

$$(M + m)\, \dot{v} = \Gamma\, (V_x - v)$$

A questo punto possiamo scrivere ($\Gamma = dm/dt$)

$$(M + m)\, \Gamma \frac{dv}{dm} = \Gamma\, (V_x - v)$$

che si può integrare direttamente:

$$\int_0^{v(m)} \frac{1}{V_x - v'} dv' = \int_0^m \frac{1}{M + m'} dm'$$

ottenendo

$$-\log \frac{V_x - v(m)}{V_x} = \log \frac{M + m}{M}$$

e quindi

$$v(m) = \frac{m}{M + m} V_x$$

Questa soluzione fornisce la velocità della scodella in funzione della massa della pioggia raccolta. Come si vede per grandi valori di m $v \to V_x$: questo si interpreta facilmente tenendo condo che quando $v = V_x$ la pioggia cade verticalmente nel sistema di riferimento solidale con la scodella, che diviene anche un sistema di riferimento inerziale. Notanto che $m = \Gamma t$ possiamo anche scrivere la velocità della scodella in funzione del tempo:

$$v(t) = \frac{\Gamma t}{M + \Gamma t} V_x$$