PROBLEMA 5.89

Urto contro una sfera ⋆⋆⋆

Dei proiettili, schematizzabili come punti materiali, si muovono con velocità $\vec{v} = -v_0\hat{z}$ è sono distribuiti uniformemente, nel senso che il numero di proiettili che attraversano una superficie qualsiasi ortogonale all'asse $\hat{z}$ è dato da

$$N = \Phi S \Delta t$$

dove S è l'area della superficie, Φ una costante e Δt l'intervallo di tempo considerato. I proiettili rimbalzano elasticamente su una sfera di raggio r fissa nell'origine del sistema di coordinate. Calcolare il numero di urti che avvengono in un secondo e mostrare che i proiettili vengono deviati uniformemente in tutte le direzioni, nel senso che i proiettili deviati che attraversano una qualsiasi parte di una superficie sferica di raggio $R \gg r$ è data da

$$N' = \Phi' S' \Delta t$$

Nella formula precedente S' è l'area della parte di superficie sferica considerata e Φ' è una costante. Calcolare inoltre Φ'.

Soluzione

Un proiettile urterà la sfera se si troverà all'interno del cilindro di raggio r avente con l'asse nella direzione $\hat{z}$. Tante particelle attraverseranno una sezione trasversa di questo cilindro, tanti saranno gli urti. Quindi avremo

$$N_{urti} = \Phi \pi r^2$$

urti al secondo. Notare che il numero di particelle che attraversano la sezione trasversa è anche il numero di particelle contenute nel cilindro di base πr^2 e altezza $v_0 \Delta t$, quindi $N_{urti} = \rho v_0 \pi r^2$ e $\Phi = \rho v_0$ dove ρ è la densità di volume dei proiettili.

Nell'urto elastico il proiettile viene deviato specularmente. Supponiamo infatti che $\hat{n}$ sia il versore normale alla superficie della sfera nel punto di impatto, abbiamo due leggi di conservazione. L'energia, dato che l'urto è elastico

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_f^2$$

e la quantità di moto del proiettile parallela alla superficie, che possiamo ottenere sottraendo alla quantità di moto totale quella perpendicolare alla superficie, $\vec{p}_\perp = m\vec{v}_\perp = m\left(\vec{v}\cdot\hat{n}\right)\hat{n}$

$$\vec{p}_\parallel = m\vec{v}_\parallel = m\left[\vec{v} - \left(\vec{v}\cdot\hat{n}\right)\hat{n}\right]$$

In questo caso si tratta in realtà di due quantità conservate, dato che $\vec{p}_\parallel$ ha due componenti indipendenti. Abbiamo quindi le equazioni

$$\begin{aligned} \vec{v}_{0\parallel} &= \vec{v}_{f\parallel} \\ v_0^2 &= v_f^2 \end{aligned}$$

Se separiamo le velocità in componenti perpendicolari e parallele la conservazione dell'energia da

$$\left(\vec{v}_{0\perp}+\vec{v}_{0\parallel}\right)^2=\left(\vec{v}_{f\perp}+\vec{v}_{f\parallel}\right)^2$$

e quindi, sviluppando e tenendo conto che componenti parallele e perpendicolari sono ortogonali tra loro,

$$v_{0\perp}^2+v_{0\parallel}^2=v_{f\perp}^2+v_{f\parallel}^2$$

Usando la seconda legge di conservazione troviamo quindi

$$v_{0\perp}^2=v_{f\perp}^2$$

cioè

$$\vec{v}_{f\perp}=\pm\vec{v}_{0\perp}$$

In quest'ultimo passaggio abbiamo potuto derivare l'uguaglianza (a meno di un segno) dei vettori dall'uguaglianza dei moduli dato che la direzione di un vettore perpendicolare alla superficie è fissato univocamente. In conclusione

$$\vec{v}_f=\vec{v}_{f\parallel}+\vec{v}_{f\perp}=\vec{v}_{0\parallel}\pm\vec{v}_{0\perp}$$

Entrambe le velocità finali soddisfano le condizioni di conservazione che abbiamo posto, ma quella con il segno positivo (corrispondente ad una velocità inalterata) non sono rilevanti per il nostro problema. Abbiamo quindi esplicitamente

$$\vec{v}_f=\vec{v}_{0\parallel}-\vec{v}_{0\perp}=\vec{v}_0-2\left(\vec{v}_0\cdot\hat{n}\right)\hat{n}$$

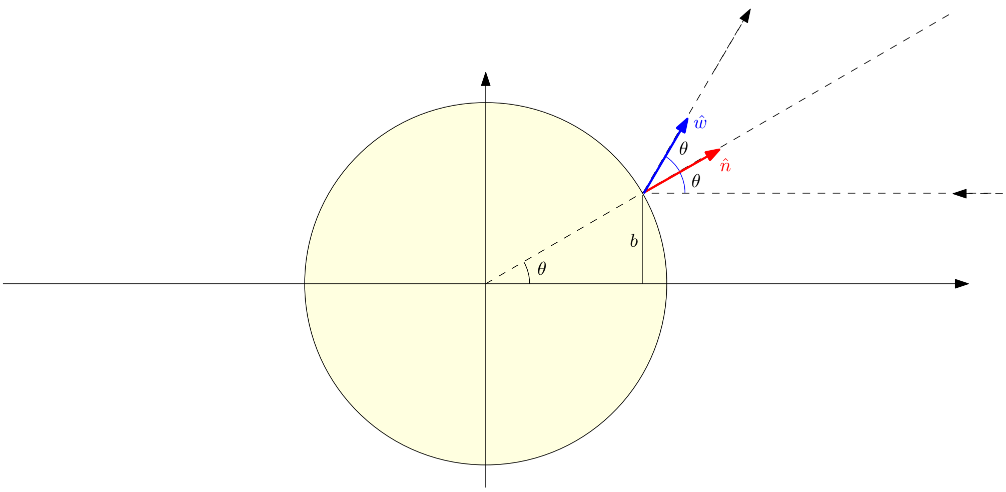

Figura 5.75.: La relazione tra particelle entranti e particelle uscenti. La particella si avvicina alla sfera muovendosi parallelamente all'asse z, ad una distanza b da esso.

Questa è la legge di riflessione speculare: la traiettoria dopo l'urto giace nel piano determinato dalla traiettoria prima dell'urto e dalla normale $\hat{n}$. Inoltre l'angolo tra la traiettoria e la normale è lo stesso prima e dopo l'urto. Se utilizziamo coordinate sferiche vediamo che la traiettoria della particella dopo l'urto è data da in funzione del parametro $s > 0$ da

$$\vec{r}' = r\hat{n} + s\hat{w}$$

dove $\hat{n}$ è il versore radiale nel punto di impatto,

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

mentre $\hat{w}$ è nella direzione del moto dopo l'urto. Dalla costruzione in Figura 5.75 vediamo che possiamo scrivere $\hat{w}$ nella forma

$$\hat{w} = \begin{pmatrix} \sin 2\theta\cos\phi \\ \sin 2\theta\sin\phi \\ \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

e che $b = r\sin\theta$, detta b la distanza tra la traiettoria iniziale della particella e l'asse $\hat{z}$.

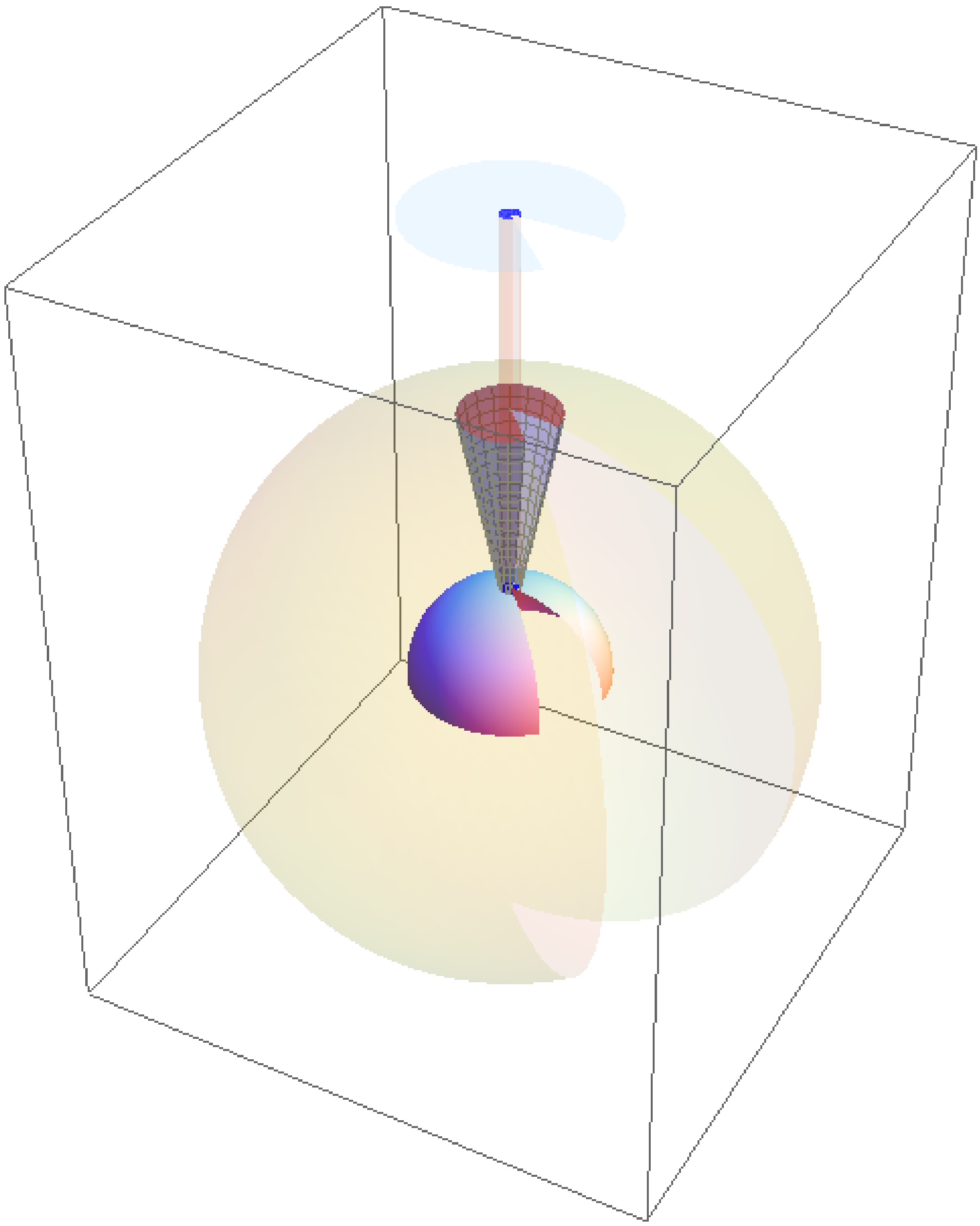

Figura 5.76.: La relazione tra particelle entranti e particelle uscenti. Il fascio in ingresso con sezione a corona circolare (in azzurro, area $\Delta S = \pi[(b+\Delta b)^2 - b^2]$) viene trasformato nell'area a forma di anello $\Delta S'$ sulla sfera esterna di raggio R. Nell'animazione l'area ΔS viene mantenuta costante, e si può verificare che anche $\Delta S'$ si mantiene approssimativamente costante. Questo non è esattamente vero perchè la condizione $R \gg r$ non è particolarmente rispettata nella figura ($R/r = 3$). Animazione disponibile all'indirizzo `http://www.df.unipi.it/~cella/videos/ueg/UrtoSfera.html`

Al variare del punto di impatto θ varia nell'intervallo $0 < \theta < \pi/2$ e ϕ in $0 < \phi < 2\pi$. Quindi $\theta' = 2\theta$ varia in $0 < \theta' < \pi$ ed il versore $\hat{w}$ varia sull'intera sfera unitaria (vedere Figura 5.76).

Considerando un elemento infinitesimo di una superficie ortogonale all'asse z, che potremo scrivere come

$$\begin{aligned} dS &= b\,db\,d\phi = r\sin\theta\, d\left(r\sin\theta\right)\, d\phi \\ &= r^2\sin\theta\cos\theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

il numero di particelle che la attraverseranno prima dell'urto nel tempo Δt sarà ($b < r$ è d'ora in poi sottointeso)

$$dN = \Phi dS \Delta t = \Phi \Delta t\, r^2 \sin\theta\cos\theta d\theta d\phi$$

Possiamo riscrivere questa quantità nella forma

$$\begin{aligned} dN &= \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \Phi\Delta t\, R^2 2\sin 2\theta d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \Phi\Delta t\, \left[R^2 d\cos\theta' d\phi\right] \end{aligned}$$

e notare che l'espressione tra parentesi quadre è l'elemento di superficie infinitesima dS' su una sfera di raggio R. Dato che per $R \gg r$ le traiettorie delle particelle dopo l'urto sono approssimativamente radiali, $\vec{r}' \simeq s\hat{w}$, tutte le particelle che attraversano la superficie attraversano successivamente dS', e quindi potremo scrivere

$$dN = \Phi' dS' \Delta t$$

con

$$\Phi' = \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \Phi$$

Notare che integrando su tutta la sfera abbiamo

$$N = \Phi' 4\pi R^2 \Delta t = \Phi\pi r^2 \Delta t = N_{urti}$$

cioè il numero di urti in un intervallo di tempo è uguale al numero di particelle che attraversano la superficie sferica.