

PROBLEMA 5.8

Moto su un anello con attrito **

Una particella materiale di massa m è vincolata a muoversi su una guida circolare di raggio R , in presenza di un attrito descritto da un coefficiente μ_d . Scrivere le equazioni del moto per la particella (senza risolverle) in assenza di gravità.

Soluzione

In coordinate polari la posizione della particella si può scrivere

$$\vec{R} = R\hat{e}_r$$

e derivando due volte otteniamo l'accelerazione

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\hat{e}_r.$$

Le forze in gioco sono la reazione vincolare normale alla guida, e l'attrito

$$\vec{F}_a = -\mu_d|N|\hat{e}_\theta \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}.$$

Dal secondo principio della dinamica abbiamo allora

$$mR(\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - \dot{\theta}^2\hat{e}_r) = N\hat{e}_r - \mu_d|N|\hat{e}_\theta \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}.$$

Proiettando lungo la normale otteniamo una prima equazione

$$-mR\dot{\theta}^2 = N$$

mentre la proiezione lungo \hat{e}_θ da

$$mR\ddot{\theta} = -\mu_d|N|\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} = -mR\mu_d\dot{\theta}^2 \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}.$$

Supponendo per esempio $\dot{\theta} > 0$ abbiamo

$$\ddot{\theta} = -\mu_d\dot{\theta}^2$$

che potrebbe essere integrata facilmente.