PROBLEMA 5.90

Perturbazione di un oscillatore armonico ⋆⋆⋆

Un oscillatore armonico è ottenuto collegando una massa m ad un punto fisso mediante una molla di lunghezza a riposo trascurabile e costante di richiamo k. Il moto è unidimensionale, e la massa si trova inizialmente nella posizione di equilibrio con velocità v_0. La legge oraria è ben nota:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$.

Si aggiunge adesso una nuova molla, in parallelo a quella precedente, anch'essa di lunghezza a riposo trascurabile e costante di richiamo $\epsilon k \ll k$, e si vuole calcolare la nuova legge oraria, mantenendo le stesse condizioni iniziali.

Anche in questo caso la soluzione esatta è facilmente calcolabile. Si vuole però procedere in modo diverso. Supponendo che la soluzione possa essere approssimata da uno sviluppo in potenze di ϵ

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \cdots$$

vogliamo provare a determinare $x_0(t)$ e $x_1(t)$ sostituendo lo sviluppo nell'equazione del moto ed eguagliando i termini dello stesso ordine in ϵ.

Confrontare il risultato approssimato con la soluzione esatta: si può dire che l'approssimazione sia buona se $\epsilon \ll 1$? Dare una spiegazione di ciò che succede.

Soluzione

L'equazione del moto del sistema si può scrivere nella forma

$$m\ddot{x} + (1+\epsilon)\, kx = 0$$

che ha per soluzione esatta con le condizioni iniziali volute

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega'} \sin \omega' t$$

dove $\omega' = \sqrt{(1+\epsilon)}\omega$.

Sostituiamo adesso la soluzione approssimata troncata al primo ordine in ϵ

$$m\left(\ddot{x}_0 + \epsilon \ddot{x}_1\right) + (1+\epsilon)\, k\left(x_0 + \epsilon x_1\right) = 0$$

ed eguagliamo i termini formalmente dello stesso ordine in ϵ. Otteniamo le due equazioni

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0$$

e

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\omega^2 x_0$$

con $\omega^2 = k/m$. La soluzione generale della prima è data da

$$x_0(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

e sostituendo nella seconda otteniamo

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\omega^2\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)$$

che rappresenta un oscillatore armonico forzato alla sua stessa frequenza naturale. La soluzione generale dell'equazione omogenea associata è identica alla precedente, resta da determinare una soluzione particolare. Verifichiamo che questa è della forma

$$x_p(t) = Ct\cos\omega t + Dt\sin\omega t$$

Infatti derivando due volte otteniamo

$$\ddot{x}_p(t) = -\omega\left[(Ct\omega - 2D)\cos\omega t + (2C + Dt\omega)\sin\omega t\right]$$

e sostituendo

$$\begin{aligned}-\omega\left[(Ct\omega - 2D)\cos\omega t + (2C + Dt\omega)\sin\omega t\right] + \omega^2\left(Ct\cos\omega t + Dt\sin\omega t\right)&\\ = -\omega^2\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)&\end{aligned}$$

da cui

$$2D\cos\omega t - 2C\sin\omega t = -\omega A\cos\omega t - \omega B\sin\omega t$$

e quindi

$$\begin{aligned}D &= -\frac{1}{2}\omega A\\ C &= \frac{1}{2}\omega B\end{aligned}$$

In conclusione la soluzione generale sarà

$$x(t) \simeq x_0(t) + \epsilon x_1(t) = \left(A + \frac{\epsilon}{2}B\omega t\right)\cos\omega t + \left(B - \frac{\epsilon}{2}A\omega t\right)\sin\omega t$$

Imponiamo le condizioni al contorno

$$\begin{aligned}x(0) &= A = 0\\ \dot{x}(0) &= \frac{1}{2}B\left(2+\epsilon\right)\omega = v_0\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}x_0(t) + \epsilon x_1(t) &= \frac{2v_0}{(2+\epsilon)\,\omega}\left(\sin\omega t + \epsilon\omega t\cos\omega t\right)\\ &= \frac{v_0}{\omega}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right)\sin\omega t + \epsilon\omega t\cos\omega t\right] + O\left(\epsilon^2\right)\end{aligned}$$

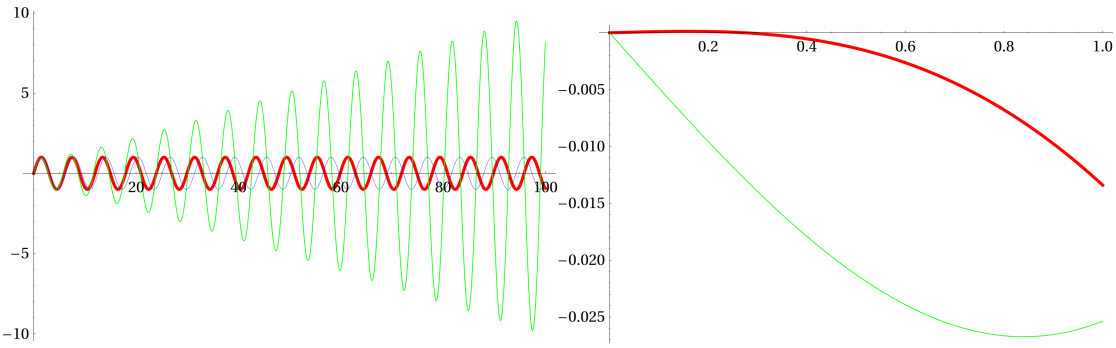

Figura 5.77.: A sinistra, il confronto tra la soluzione esatta (in rosso), quella approssimata all'ordine zero $x_0(t)$ (in blu) e quella approssimata al primo ordine $x_0(t) + \epsilon x_1(t)$ (in verde). Sono stati scelti i valori $\epsilon = 10^{-1}$, $\omega = 1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ e $v_0 = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ A destra, la differenza tra espresso in secondi. A destra, la differenza tra $x_0(t)$ e la soluzione esatta (in verde) e tra $x_0(t) + \epsilon x_1(t)$ e la soluzione esatta (in rosso) per $0 < t < 1$ con la stessa scelta di parametri.

Già da questa espressione finale possiamo iniziare a capire quanto sia valida la soluzione approssimata ottenuta. Infatti ci attendiamo che il termine $O(\epsilon)$ debba essere una piccola correzione rispetto a quello $O(1)$. Ma questo non è vero: infatti per quanto piccolo possa essere ϵ vediamo che per tempi abbastanza grandi (tali che $\omega t > \epsilon^{-1}$) il secondo termine tra parentesi quadre diviene dominante.

Una conferma viene dal confronto tra i grafici della soluzione esatta (in rosso) e di quella approssimata in Figura 5.77 a sinistra. Come si vede l'approssimazione al primo ordine in ϵ $x_0(t) + \epsilon x_1(t)$, riportata in verde, sembra addirittura peggiore di quella all'ordine zero $x_0(t)$ riportata in blu.

Cerchiamo di capire perché. Se espandiamo formalmente la soluzione esatta in ϵ, dovremmo ottenere quella approssimata. Ora, possiamo iniziare scrivendo

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} \frac{v_0}{\omega} \sin\left(\sqrt{1+\epsilon}\,\omega t\right)$$

e dato che $\epsilon \ll 1$ sarà sicuramente una buona approssimazione $(1+\epsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\epsilon$ da cui

$$x(t) \simeq \frac{v_0}{\omega}\left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right) \sin\left(\omega t + \frac{1}{2}\epsilon\omega t\right)$$

Se procediamo meccanicamente, dovremmo adesso espandere il seno nella forma

$$\sin\left(\omega t + \frac{1}{2}\epsilon\omega t\right) \simeq \sin\omega t + \frac{1}{2}\epsilon\omega t \cos\omega t \tag{5.90.1}$$

ed in effetti otterremmo la soluzione approssimata $x_0(t) + \epsilon x_1(t)$ (dopo aver cancellato un termine $O(\epsilon^2)$. Il problema è che affinchè l'approssimazione (5.90.1) sia accurata non è sufficiente $\epsilon \ll 1$. Occorre infatti che la correzione alla fase del seno sia piccola,

$$\frac{1}{2}\epsilon\omega t \ll 2\pi$$

e questo smette di essere vero per tempi abbastanza grandi, comunque piccolo sia ϵ. Possiamo riassumere la discussione dicendo che in realtà la variabile "piccola" nella quale ha senso espandare la soluzione non è bensì $\epsilon\omega t$.

Ci si può chiedere infine se la soluzione al primo ordine sia in qualche modo più accurata di quella di ordine zero. Da quanto visto è facile rispondere che l'approssimazione $x_0 + \epsilon x_1$ sarà migliore della x_0 nel regime $\epsilon\omega t \ll 1$. Ad esempio prendendo $\epsilon = 10^{-2}$ e $\omega = 1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ci attendiamo un errore piccolo per $t \ll 10\,\mathrm{s}$. Questo è confermato dal grafico a destra in Figura 5.77, dove sono riportate la differenza tra $x_0(t)$ e la soluzione esatta (in verde) e la differenza tra $x_0(t) + \epsilon x_1(t)$ e la soluzione esatta (in rosso) per $0 < t < 1$ con questa stessa scelta di parametri. Vediamo che in effetti l'errore al primo ordine è minore di quello all'ordine zero.