PROBLEMA 5.91

Pendolo modificato ⋆⋆⋆

Il pendolo in Figura 5.78, di lunghezza ℓ e massa m, è sospeso nel punto in cui si congiungono due semicirconferenze di raggio R. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio. Come cambia la risposta se invece di due semicirconferenze si considerano due curve qualsiasi, ma con tangente verticale al punto di sospensione e raggio di curvatura R?

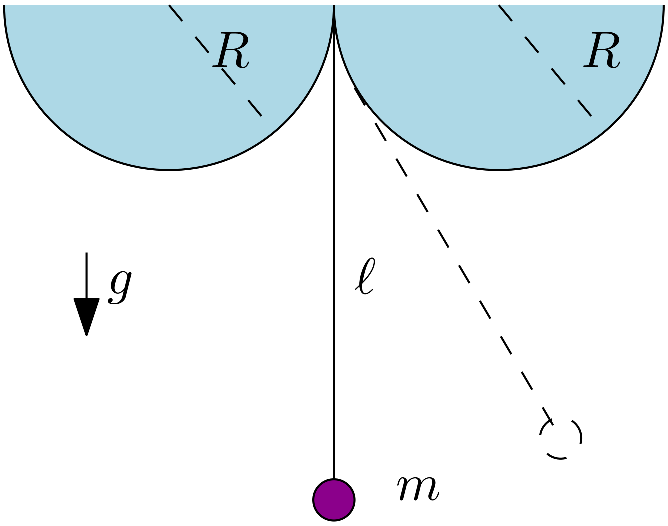

Figura 5.78.: Il pendolo modificato descritto nel problema. Durante l'oscillazione una parte del filo si appoggia ad una delle due semicirconferenze.

Soluzione

Usiamo come coordinata l'angolo θ di inclinazione del filo rispetto alla verticale. Ponendo l'origine nel punto di sospensione le coordinate della massa si scrivono

$$
\begin{aligned}
x &= R(1-\cos\theta) + (\ell - R\theta)\sin\theta = \ell\theta - \frac{1}{2}R\theta^2 + O\left(\theta^3\right) \\
y &= -R\sin\theta - (\ell - R\theta)\cos\theta = -\ell + \frac{1}{2}\ell\theta^2 + O\left(\theta^3\right)
\end{aligned}
$$

per $\theta > 0$ e

$$
\begin{aligned}
x &= -R(1-\cos\theta) + (\ell + R\theta)\sin\theta = \frac{1}{2}R\theta^2 + \ell\theta + O\left(\theta^3\right) \\
y &= R\sin\theta - (\ell + R\theta)\cos\theta = -\ell + \frac{1}{2}\ell\theta^2 + O\left(\theta^3\right)
\end{aligned}
$$

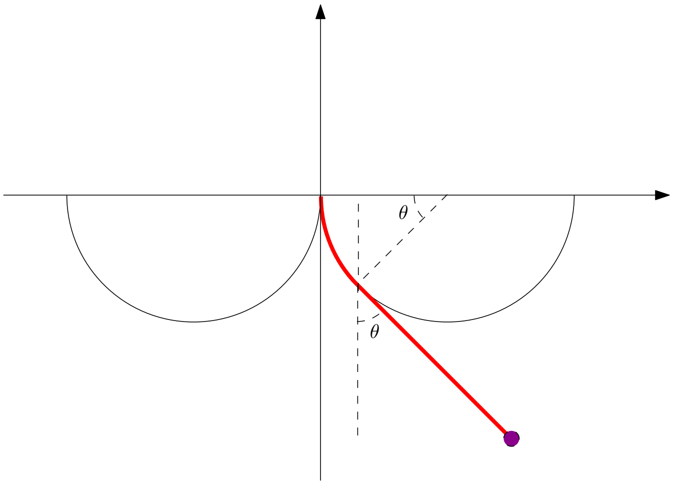

Figura 5.79.: Ponendo l'origine nel descritto nel problema. Durante l'oscillazione una parte del filo si appoggia ad una delle due semicirconferenze.

per $\theta < 0$. I valori approssimati valgono per piccole oscillazioni attorno a $\theta = 0$. Sempre per piccole oscillazioni le velocità varranno

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \ell\dot{\theta} - R\theta\dot{\theta} + O\left(\theta^2\dot{\theta}\right)\\ \dot{y} &= \ell\theta\dot{\theta} + O\left(\theta^2\dot{\theta}\right)\end{aligned}$$

per $\theta > 0$ e

$$\begin{aligned}\dot{x} &= R\theta\dot{\theta} + \ell\dot{\theta} + O\left(\theta^2\dot{\theta}\right)\\ \dot{y} &= \ell\theta\dot{\theta} + O\left(\theta^2\dot{\theta}\right)\end{aligned}$$

per $\theta < 0$. L'energia vale, per piccole oscillazioni,

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgy\\ &= \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell + \frac{1}{2}mg\ell\theta^2\end{aligned}$$

che è identica all'energia di un pendolo semplice. Dunque le semicirconferenze non hanno alcun effetto sulle piccole oscillazioni.

Se al posto delle circonferenze si avessero due curve con tangente verticale nell'origine e raggio di curvatura (sempre nell'origine) ρ, sarebbe possibile riscrivere le coordinate della massa nella forma

$$\begin{aligned}x &= X(s) + (\ell - s)\sin\theta(s)\\ y &= Y(s) - (\ell - s)\cos\theta(s)\end{aligned}$$

dove Y e Y sono le coordinate della curva e abbiamo usato come parametro la lunghezza s del filo che si appoggia ad essa. Per piccoli valori si s (e quindi di θ) avremo per $\theta > 0$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}\frac{d^2X}{ds^2}(0)s^2 + (\ell - s)\,\frac{d\theta}{ds}(0)s + O(s^3)\\
y &= \frac{dY}{ds}(0)s + \frac{1}{2}\frac{d^2Y}{ds^2}(0)s^2 - \ell + s + \frac{1}{2}\ell\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 s^2 + O(s^3)
\end{aligned}
$$

e per la velocità

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{d^2X}{ds^2}(0)s\dot{s} + \left(\ell\frac{d\theta}{ds}(0)\dot{s} - 2\frac{d\theta}{ds}(0)s\dot{s}\right) + O(s^2\dot{s})\\
\dot{y} &= \frac{dY}{ds}(0)\dot{s} + \frac{d^2Y}{ds^2}(0)s\dot{s} + \dot{s} + \ell\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 s\dot{s} + O(s^2\dot{s})
\end{aligned}
$$

ma dato che la tangente è verticale $\frac{dY}{ds}(0) = -1$, inoltre $\frac{d\theta}{ds} = \rho^{-1}$. Espressioni analoghe varranno per $\theta < 0$. Notiamo infine che vale

$$
\frac{dY}{ds} = -\cos\theta
$$

e che quindi

$$
\frac{d^2Y}{ds^2} = \frac{d\theta}{ds}\sin\theta = \frac{1}{\rho}\sin\theta
$$

si annulla per $\theta = 0$. L'energia per piccole oscillazioni sarà quindi a meno di costanti

$$
E = \frac{1}{2}m\left(\frac{\ell}{\rho}\dot{s}\right)^2 + \frac{1}{2}mg\frac{\ell}{\rho^2}s^2
$$

che corrisponde ad un'equazione del moto del pendolo semplice

$$
\ddot{s} + \frac{g}{\ell}s = 0
$$

Quindi anche in questo caso le curve non hanno alcun effetto sul sistema per piccole oscillazioni. Notare che questo risultato è vero indipendentemente dal valore di ρ.