PROBLEMA 5.92

Accelerazione massima su disco rotante ⋆⋆

Un disco di massa M e raggio R è libero di ruotare attorno ad un asse verticale ortogonale ad esso e passante per il suo centro. Sul suo bordo si trova una macchinina di dimensioni trascurabili e massa m. Le ruote della macchinina sono bloccate in modo da vincolare quest'ultima ad un moto circolare di raggio R. Tra le ruote della macchinina e il disco si ha attrito statico, con coefficiente μ_s.

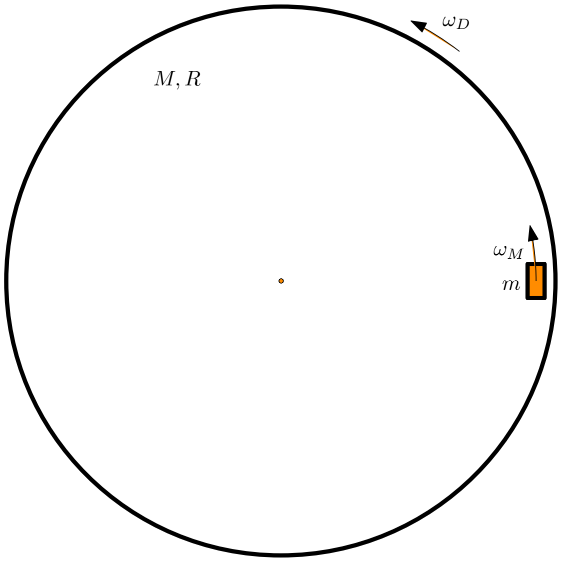

Figura 5.80.: Sia la macchinina che il disco si muovono, rispettivamente con velocità angolare $\omega_M(t)$ e $\omega_D(t)$.

Inizialmente disco e macchinina sono fermi, e l'accelerazione di quest'ultima ha in ogni istante il massimo valore che permette di mantenere l'aderenza con il disco. Ad un certo momento l'accelerazione tangenziale della macchinina si deve annullare: determinare l'angolo percorso dalla macchinina e dal disco.

Soluzione

L'unica forza orizzontale che agisce sulla macchinina è quella di attrito. La massima forza di attrito statico deve uguagliare la massa della macchinina per il modulo della sua accelerazione, che avrà una componente tangenziale $a_T = R\dot{\omega}_M$ e una componente centripeta $a_c = R\omega_M^2$

$$\mu_s mg = m\sqrt{(R\dot{\omega}_M)^2 + \left(R\omega_M^2\right)^2}$$

Inizialmente $\omega_M = 0$, quindi l'accelerazione è solo tangenziale e vale $a_T = \mu_s g$. Mano mano che ω_T aumenta l'accelerazione tangenziale deve diminuire, fino ad annullarsi quando $\mu_s g = a_c = R\omega_M^2$, cioè quando

$$\omega_M^2 = \frac{\mu_s g}{R}$$

Otteniamo quindi l'equazione differenziale

$$\dot{\omega}_M^2 + \omega_M^4 = \left(\frac{\mu_s g}{R}\right)^2$$

Conviene usare come variabile indipendente non il tempo ma l'angolo θ_M. In termini di questo l'equazione precedente si scrive

$$\left(\frac{d\omega_M}{d\theta_M}\right)^2 \omega_M^2 + \omega_M^4 = \left(\frac{\mu_s g}{R}\right)^2$$

dato che $\dot{\theta}_M = \omega_M$. Quindi

$$\omega_M \frac{d\omega_M}{d\theta_M} = \pm\sqrt{\left(\frac{\mu_s g}{R}\right)^2 - \omega_M^4}$$

ossia

$$\frac{1}{2}\frac{d\omega_M^2}{d\theta_M} = \pm\sqrt{\left(\frac{\mu_s g}{R}\right)^2 - \omega_M^4}$$

Questa è un'equazione a variabili separabili, che possiamo integrare direttamente per ottenere l'angolo totale percorso dalla macchinina, θ_M^*

$$\int_0^{\theta_M^*} d\theta_M = \pm\frac{1}{2}\int_0^{\mu_s g/R} \frac{d\omega_M^2}{\sqrt{\left(\frac{\mu_s g}{R}\right)^2 - \omega_M^4}}$$

Introducendo la variabile $x = \omega_M^2 R/(\mu_s g)$ abbiamo

$$\theta_M^* = \pm\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pm\frac{\pi}{4}$$

risultato che non dipende dalle masse o dal raggio del disco. I due segni dipendono dai due possibili versi dell'accelerazione.

Per determinare l'angolo di rotazione del disco usiamo la conservazione del momento angolare del sistema, inizialmente nullo. Abbiamo allora

$$mR^2\omega_M + I\omega_D = 0$$

e quindi, integrando e tenendo conto che inizialmente , otteniamo

$$\theta_D^* = -\frac{mR^2}{I}\theta_M^* = -2\frac{m}{M}\theta_M^* = -\frac{m}{M}\frac{\pi}{2}$$