

PROBLEMA 5.93

Caduta in un fossato **

Un punto materiale si muove in un piano orizzontale con velocità di modulo V . Ad un certo punto arriva sul bordo di un fossato con sezione semicircolare di raggio R , perpendicolarmente ad esso. Cade nel fossato (senza rimanere aderente alla superficie) e rimbalza elasticamente in una certa posizione del fondo. Si osserva che dopo il rimbalzo la particella si muove verticalmente verso l'alto: calcolare la velocità V e la massima altezza h raggiunta.

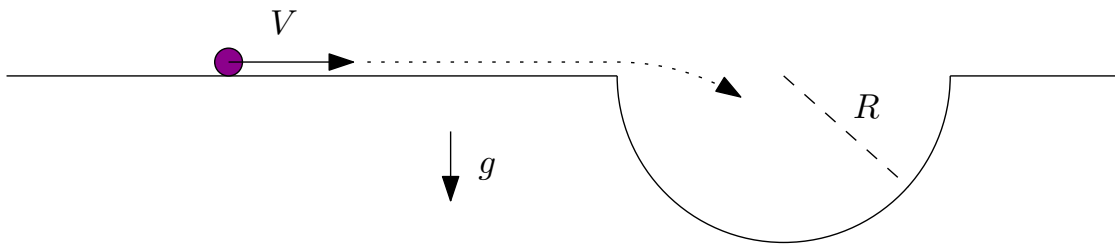


Figura 5.81.: La particella arriva sul bordo del fossato perpendicolarmente ad esso, si stacca e cade sotto l'azione della gravità.

Soluzione

L'altezza massima raggiunta rispetto al piano si trova facilmente con la conservazione dell'energia,

$$\frac{1}{2}mV^2 = mgh$$

da cui

$$h = \frac{V^2}{2g}$$

In un sistema di riferimento con origine nel centro della circonferenza determinata dalla sezione del fossato la traiettoria del punto materiale è determinata dalle leggi orarie

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$x = -R + Vt$$

nella forma

$$y = -\frac{g}{2V^2}(x + R)^2$$

Dato che l'intersezione della traiettoria con la semicirconferenza si ottiene quando $x^2 + y^2 = R^2$, quindi conviene usare la parametrizzazione $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$. Abbiamo quindi una prima relazione

$$\sin \theta = -\frac{gR}{2V^2}(1 + \cos \theta)^2 \quad (5.93.1)$$

Dobbiamo adesso imporre che dopo l'urto la particella si muova verticalmente. La velocità \vec{v} prima dell'urto è

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -gt = -\sqrt{-2gy} \\ \dot{x} &= V \end{aligned}$$

e dato che l'urto è elastico, la velocità \vec{v}' immediatamente dopo è data da

$$\vec{v}' = \vec{v} - 2(\vec{v} \cdot \hat{n}) \hat{n}$$

ma per ipotesi $\vec{v}' \cdot \hat{x} = 0$, cioè

$$\vec{v} \cdot \hat{x} = 2(\vec{v} \cdot \hat{n})(\hat{n} \cdot \hat{x})$$

Dato che

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

esplicitamente questo significa

$$2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{-\frac{2gR}{V^2} \sin \theta}$$

ossia, usando la (5.93.1)

$$2 \cos^2 \theta - 1 = \frac{2gR}{V^2} \sin \theta \cos \theta (1 + \cos \theta) \quad (5.93.2)$$

Dividendo membro a membro la (5.93.2) per la (5.93.1) otteniamo l'equazione da cui

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sostituendo nella (5.93.1) otteniamo

$$V = \sqrt{gR} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right)^{3/4} \simeq 0.935 \sqrt{gR}$$

Possiamo ora calcolare esplicitamente anche l'altezza massima raggiunta

$$h = \frac{1}{2} R \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right)^{3/2} \simeq 0.437 R$$

Notare che dipende solo dal raggio del fossato.