PROBLEMA 5.94

Piccole oscillazioni I ★★

Sulla metà di un cilindro di raggio R è appoggiata una sbarra di lunghezza ℓ e massa trascurabile. Agli estremi della sbarra sono fissate due massa uguali m. La sbarra è libera di inclinarsi rotolando senza strisciare sul cilindro, e non sono presenti attriti. Dire se la posizione di equilibrio in figura è stabile: in caso positivo calcolare la frequenza della piccole oscillazioni.

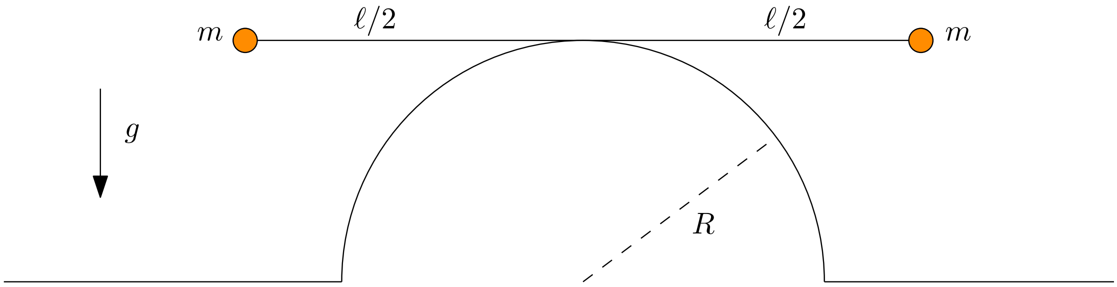

Figura 5.82.: Il punto medio della sbarra è appoggiato alla sommità del cilindro. La sbarra rotola senza strisciare, in altre parole il punto della sbarra a contatto con il cilindro è istante per istante fermo.

Soluzione

Usiamo come coordinata l'angolo tra la direzione verticale e il segmento che congiunge il centro del cilindro con il punto di contatto, come in Figura (5.83).

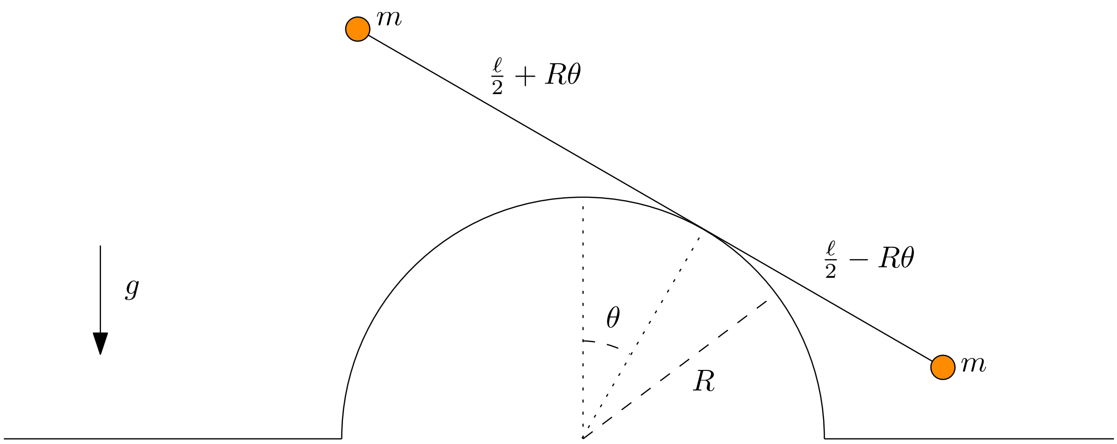

Figura 5.83.: Il punto medio della sbarra è appoggiato alla sommità del cilindro. La sbarra rotola senza strisciare, in altre parole il punto della sbarra a contatto con il cilindro è istante per istante fermo.

Scegliendo un sistema di riferimento con origine nel centro del cilindro, possiamo scrivere le coordinate delle due masse. Per quella a sinistra vale

$$x_1 = R\sin\theta - \left(\frac{\ell}{2} + R\theta\right)\cos\theta$$
$$y_1 = R\cos\theta + \left(\frac{\ell}{2} + R\theta\right)\sin\theta$$

e per quella a destra

$$x_2 = R\sin\theta + \left(\frac{\ell}{2} - R\theta\right)\cos\theta$$
$$y_2 = R\cos\theta - \left(\frac{\ell}{2} - R\theta\right)\sin\theta$$

L'energia potenziale si può scrivere adesso come

$$U(\theta) = mgy_1 + mgy_2 = 2mgR\left(\cos\theta + \theta\sin\theta\right)$$

Per piccole oscillazioni attorno a $\theta = 0$ abbiamo

$$U(\theta) = 2mgR\left(1 + \frac{\theta^2}{2}\right) + O\left(\theta^4\right)$$

che ha un minimo appunto in $\theta = 0$: quindi questa posizione è di equilibrio stabile.

Per determinare la frequenza delle piccole oscillazioni scriviamo l'energia cinetica. Possiamo derivare le coordinate e trovare le componenti della velocità. Più semplicemente possiamo osservare che la sbarra ruota istante per istante attorno al punto di contatto con velocità angolare $\dot{\theta}$, e quindi

$$|v_1| = \left|\left(\frac{\ell}{2} + R\theta\right)\dot{\theta}\right|$$
$$|v_2| = \left|\left(\frac{\ell}{2} - R\theta\right)\dot{\theta}\right|$$

Per piccole oscillazioni possiamo trascurare i termini proporzionali al prodotto $\theta\dot{\theta}$ e quindi a meno di una costante

$$E = \frac{1}{2}2m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}2mgR\theta^2$$

che è l'energia di un oscillatore armonico di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2mgR}{2m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4gR}{\ell^2}}$$