PROBLEMA 5.96

Urti istantanei e attrito ⋆⋆

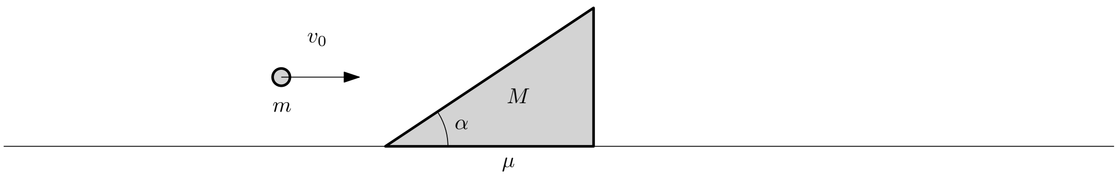

Figura 5.84.: La particella urta contro il piano inclinato: in quel momento ha una velocità $\vec{v} = v_0\hat{x}$.

Su un piano orizzontale è appoggiato un cuneo di massa M. Contro la sua faccia obliqua, inclinata di un angolo α rispetto all'orizzontale, viene lanciato un proiettile di massa m. Al momento dell'urto la velocità del proiettile è orizzontale e vale v_0 in modulo. Si sa che la forza tra il proiettile e il cuneo è conservativa e perpendicolare al piano che viene urtato.

Tra il cuneo e il piano orizzontale è presente attrito dinamico, descritto da un coefficiente μ. Non si tiene conto del possibile attrito statico: per esempio si può immaginare che la velocità iniziale del cuneo non sia esattamente nulla ma molto piccola.

Considerare il caso limite di urto istantaneo. Trovare, se ci sono, delle quantità conservate durante l'urto e calcolare le velocità finali di cuneo e proiettile.

Soluzione

Indichiamo con $R(t)$ la forza di reazione che il lato obliquo del cuneo esercita sul proiettile durante l'urto. Possiamo allora scrivere le equazioni del moto, sempre durante l'urto, nella forma

$$\begin{aligned}
ma_x(t) &= -R(t)\sin\alpha \\
ma_y(t) &= R(t)\cos\alpha - mg \\
MA_x(t) &= R(t)\sin\alpha - \mu N(t) \\
0 &= -R(t)\cos\alpha + N(t) - Mg
\end{aligned} \tag{5.96.1}$$

Abbiamo indicato con a_x, a_y le componenti dell'accelerazione del proiettile, con A_x l'accelerazione del cuneo e con N la reazione normale del piano su cui il cuneo è appoggiato. Se l'interazione tra proiettile e cuneo avviene per $0 < t < \tau$ possiamo integrare le equazioni precedenti in tale intervallo , ottenendo

$$\begin{aligned}
mv_x(t) &= mv_0 - I(t)\sin\alpha \\
mv_y(t) &= I(t)\cos\alpha - mgt \\
MV_x(t) &= I(t)\sin\alpha - \mu\left[I(t)\cos\alpha + Mgt\right]
\end{aligned}$$

dove

$$I(t)=\int_0^t R(t')dt'$$

è l'impulso ceduto dal cuneo al proiettile al tempo t. In particolare immediatamente dopo l'urto avremo

$$\begin{aligned}
v_x(\tau) &= v_0-\frac{1}{m}I(\tau)\sin\alpha\\
v_y(\tau) &= \frac{1}{m}I(\tau)\cos\alpha-g\tau\\
V_x(t) &= \frac{1}{M}I(\tau)\left(\sin\alpha-\mu\cos\alpha\right)-\mu g\tau
\end{aligned}\tag{5.96.2}$$

Nel limite di urto istantaneo

$$\lim_{\tau\to0}I(\tau)=I^*$$

resta finito, ma possiamo trascurare le forze peso. Questo si esprime dicendo che le forze peso non sono forze impulsive, cioè restano finite nel limite di urto istantaneo. Invece sia $R(t)$ che $N(t)$ sono forze impulsive, in particolare anche la forza di attrito $\mu N(t)$ lo sarà e non potrà essere trascurata.

Ad ogni modo abbiamo espresso le velocità finali in termini dell'impulso totale I^*. Per quanto riguarda le leggi di conservazione, osserviamo che dall'ipotesi che R sia normale alla superfice obliqua del cuneo segue immediatamente che si deve conservare la componente della quantità di moto del proiettile parallela ad essa. Verifichiamolo direttamente:

$$\begin{aligned}
p_\parallel &= mv_x\cos\alpha+mv_y\sin\alpha\\
&= m\left(v_0-\frac{I^*}{m}\sin\alpha\right)\cos\alpha+m\left(\frac{I^*}{m}\cos\alpha\right)\sin\alpha\\
&= mv_0\cos\alpha
\end{aligned}$$

Possiamo quindi calcolare la variazione dell'energia cinetica

$$\begin{aligned}
\Delta E_c &= \frac{1}{2}m\left\{\left[v_0-\frac{I^*}{m}\sin\alpha\right]^2+\left[\frac{I^*}{m}\cos\alpha\right]^2\right\}+\frac{1}{2}M\left[\frac{I^*}{M}\left(\sin\alpha-\mu\cos\alpha\right)\right]^2-\frac{1}{2}mv_0^2\\
&= \frac{1}{2}I^*\left\{I^*\left[\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\left(\sin\alpha-\mu\cos\alpha\right)^2\right]-2v_0\sin\alpha\right\}
\end{aligned}$$

e della quantità di moto orizzontale totale

$$\Delta P_x=-\mu I^*\cos\alpha$$

Per quest'ultima concludiamo che non si ha conservazione, come ci si poteva aspettare dato che la forza di attrito (impulsiva) è orizzontale. Per poter dire qualcosa di più sull'energia, e per finire di calcolare le velocità finali, dobbiamo calcolare $I^\star$. Non abbiamo ancora sfruttato il fatto che la forza R è conservativa. Calcoliamo il lavoro fatto da essa sul sistema durante l'urto, che si può scrivere come

$$L = \int_0^\tau \left[(-R\sin\alpha)\, v_x + (R\cos\alpha)\, v_y + (R\sin\alpha)\, V \right] dt$$

Ma adesso inseriamo le espressioni delle velocità durante l'urto ricavate dalle (5.96.2) ottenendo

$$L = \int_0^\tau R(t) \left\{ -v_0 \sin\alpha + \frac{1}{m} I(t) + \frac{1}{M} I(t) \left(\sin^2\alpha - \mu\cos\alpha\sin\alpha \right) \right\} dt$$

Notare che abbiamo nuovamente trascurato le forze peso, dato che siamo sempre interessati al limite di urto istantaneo. Dato che la forza è conservativa deve essere $L = 0$, quindi

$$\left[\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \left(\sin^2\alpha - \mu\cos\alpha\sin\alpha \right) \right] \int_0^\tau R(t) I(t) dt = v_0 \sin\alpha \int_0^\tau R(t) dt$$

Sappiamo già che l'integrale a destra vale I^*. Per calcolare quello a sinistra osserviamo che $R = \dot{I}$, e quindi

$$\int_0^\tau R(t) I(t) dt = \int_0^\tau \dot{I}(t) I(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \left(I^2 \right) dt = \frac{1}{2} I^{*2}$$

Otteniamo infine

$$I^* = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \left(\sin^2\alpha - \mu\cos\alpha\sin\alpha \right)}$$

Se sostituiamo nell'espressione per la variazione dell'energia ricavata precedentemente otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta E &= I^* \left\{ \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha \right)^2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \left(\sin^2\alpha - \mu\cos\alpha\sin\alpha \right)} - 1 \right\} v_0 \sin\alpha \\ &= -\frac{1}{2} \mu M^{-1} I^{*2} \left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha \right) \cos\alpha \end{aligned}$$

Notiamo che in assenza di attrito ($\mu = 0$) l'energia si conserva. Lo stesso accade per $\alpha = \pi/2$: questo risultato in apparenza sorprendente dipende dal fatto che quando il lato obliquo del cuneo diviene verticale la reazione $N(t)$ non è più impulsiva, e quindi l'attrito si può trascurare durante l'urto.