

PROBLEMA 5.97

## Attrito e paradossi \*\*\*

I risultati del problema 5.96 sembrano condurre a delle situazioni paradossali. In particolare, per certi valori del coefficiente di attrito dinamico  $\mu$  il sistema può acquistare energia nell'urto ( $\Delta E > 0$ ) e il cuneo può iniziare a muoversi nella direzione da cui proviene il proiettile. Mostrate (se possibile) che queste situazioni paradossali non si verificano, se il modello usato per la forza di attrito è ragionevole.

## Soluzione

Riprendiamo dall'esercizio precedente i due risultati "incriminati". Il primo riguarda la velocità del cuneo immediatamente dopo l'urto, che riscriviamo nella forma

$$V_x(t) = 2v_0 \frac{\sin \alpha \cos \alpha (\tan \alpha - \mu)}{\frac{M}{m} + \sin \alpha \cos \alpha (\tan \alpha - \mu)} \quad (5.97.1)$$

e il secondo la variazione dell'energia durante il medesimo

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \mu M^{-1} I^{*2} (\tan \alpha - \mu) \cos^2 \alpha$$

Se  $\mu < \tan \alpha$  non succede niente di particolare. Al contrario se  $\mu > \tan \alpha$  durante l'urto apparentemente si ha sempre  $\Delta E > 0$ , inoltre se

$$-\frac{M}{m} < \sin \alpha \cos \alpha (\tan \alpha - \mu) < 0$$

si trova anche  $V_x < 0$ .

Per risolvere il paradosso osserviamo che nell'esercizio precedente le equazioni sono state scritte utilizzando due assunzioni implicite:

1. la velocità del cuneo  $V_x$  è positiva: in caso contrario la forza di attrito cambia segno
2. la reazione normale del piano è positiva: in caso contrario il cuneo si stacca da terra

Affinchè la seconda assunzione sia consistente, è necessario che  $R(t) > 0$ , come segue dalla quarta equazione delle (5.96.1). In particolare deve essere  $I^* > 0$ , ma dato che

$$I^* = \frac{2Mv_0 \sin \alpha}{\frac{M}{m} + \sin \alpha \cos \alpha (\tan \alpha - \mu)}$$

questo esclude i casi in cui

$$\sin \alpha \cos \alpha (\tan \alpha - \mu) < -\frac{M}{m}$$

Tolta questa possibilità, avremo  $\Delta E < 0$  se  $V_x > 0$  e  $\Delta E > 0$  se  $V_x < 0$ .

Possiamo chiederci cosa accade in realtà se le nostre equazioni predicono  $V_x < 0$ . Dato che abbiamo supposto, per evitare di considerare l'attrito statico, che la velocità iniziale del cuneo fosse molto piccola ma positiva, abbiamo che se  $\mu > \tan \alpha$  il cuneo si ferma per un istante durante l'urto. In questo caso non possiamo più trascurare l'attrito statico, e dobbiamo capire se a causa di questo il cuneo rimane fermo. In effetti questo avverrà se

$$F_a + R \sin \alpha = 0$$

cioè se

$$R \sin \alpha < \mu_s R \cos \alpha$$

ossia per

$$\tan \alpha > \mu_s$$

Ma dato che  $\mu_s > \mu$  possiamo concludere che quando  $\tan \alpha > \mu$  il cuneo sarà in realtà fermo dopo l'urto.