PROBLEMA 5.98

Moto in un campo centrale III ⋆⋆⋆

Studiare le traiettorie di un punto materiale sul quale è applicata una forza

$$\vec{F} = \frac{\alpha}{r^4}\vec{r}$$

dove $\vec{r}$ è il vettore posizione e α una costante.

Soluzione

La forza è attrattiva se $\alpha < 0$ e repulsiva altrimenti. Dato che è anche centrale si conserva il momento angolare. Inoltre la forza è conservativa: possiamo verificare che l'energia potenziale corretta è

$$U(r) = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{r^2}$$

dato che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\alpha}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\alpha x}{r^4} = -F_x$$

e così via per le altre componenti. Quindi le quantità

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{r^2} \\ L &= mr^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

sono costanti. Ricaviamo $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

e sostituendo otteniamo

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2 + m\alpha}{2mr^2}$$

Per studiare le traiettorie possiamo riscrivere l'espressione precedente nella forma

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{L^2 + m\alpha}{2mr^2} \\ &= \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{L}{mr^2}\right)^2 + \frac{L^2 + m\alpha}{2mr^2} \end{aligned}$$

Introduciamo adesso la nuova variabile $u = 1/r$, da cui

$$E = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{L^2 + m\alpha}{2m}\right)u^2$$

Derivando rispetto a θ otteniamo

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{L^2}{m}\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(\frac{L^2 + m\alpha}{m}\right)\frac{du}{d\theta}u$$

e dato che E è costante otteniamo una equazione per la traiettoria

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{m\alpha}{L^2}\right) u = 0$$

Le caratteristiche della soluzione generale dipendono dal valore di $m\alpha L^{-2}$.

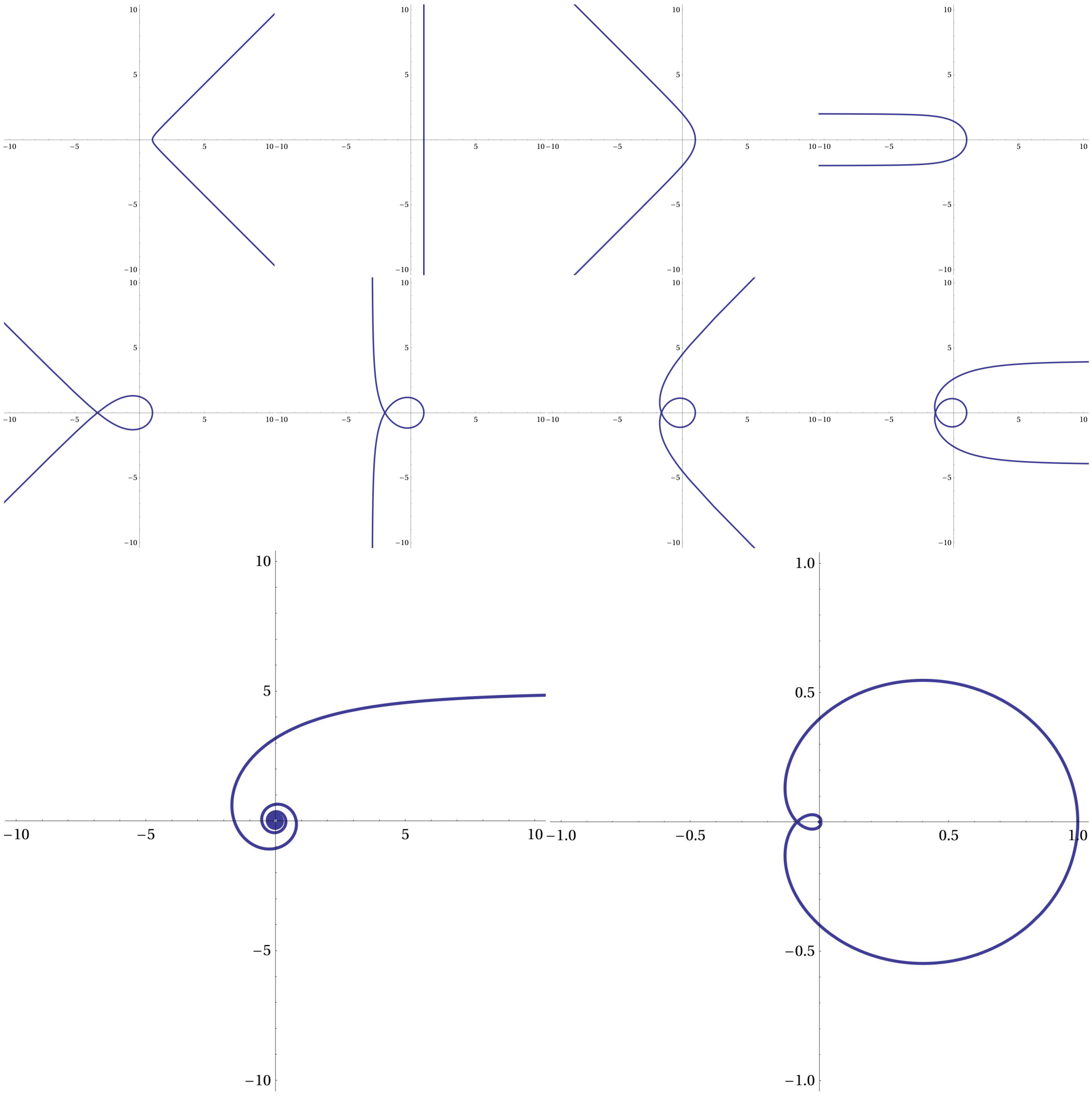

Figura 5.85.: Alcuni esempi di orbite. Le prime 8 traiettorie, da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso, corrispondono al caso 1. per $k = 2/n$ e $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. La traiettoria in basso a sinistra corrisponde al caso 2. (per $a = 1/5$). La traiettoria in basso a destra corrisponde al caso 3., per $r_0 = 1$ e $k = 1$. In quest'ultimo caso non è possibile apprezzare dalla figura il numero infinito di rivoluzioni attorno all'origine.

1. Se $m\alpha L^{-2} > -1$ la soluzione è oscillatoria:

$$u = \frac{1}{r} = A\cos\left[\sqrt{1+\frac{m\alpha}{L^2}}\left(\theta+\phi\right)\right]$$

e le costanti A, ϕ dipendono dalle condizioni iniziali. In particolare possiamo limitarci a studiare il caso $\phi = 0$, dato che il caso generale si ottiene semplicemente ruotando la traiettoria di ϕ. Abbiamo quindi un'equazione della forma

$$r = \frac{r_0}{\cos k\theta}$$

con $k = \sqrt{1+m\alpha L^{-2}}$ e $r_0 = A^{-1}$ assume il significato di raggio di massimo avvicinamento, che corrisponde a $\theta = 0$. All'aumentare di θ la particella si allontana, e sfugge all'infinito quando $\theta = \frac{\pi}{2k}$. Alcune traiettorie possibili sono rappresentate in Figura 5.85. Un caso particolare interessante corrisponde a $k = 1$, cioè

$$r\cos\theta = x = r_0$$

che corrisponde a una traiettoria rettilinea [2].

2. Se $m\alpha L^{-2} = -1$ si ha

$$u = \frac{1}{r} = a\left(\theta+\phi\right)$$

e quindi a meno di una rotazione

$$r = \frac{1}{a\theta}$$

La traiettoria si può descrivere come una spirale che si avvicina all'origine ruotando infinite volte attorno ad essa. Un caso particolare è rappresentato in Figura 5.85, in basso a sinistra.

3. Se $m\alpha L^{-2} < -1$ la soluzione è

$$u = \frac{1}{r} = A\cosh\left[\sqrt{-1-\frac{m\alpha}{L^2}}\left(\theta+\phi\right)\right]$$

di conseguenza, sempre a meno di una rotazione,

$$r = \frac{r_0}{\cosh k\theta}$$

con $k = \sqrt{-1-m\alpha L^{-2}}$. In questo caso r_0 rappresenta la distanza di massimo allontanamento, che si ha per $\theta = 0$. Successivamente la particella si avvicina all'origine indefinitamente, ruotando infinite volte attorno ad essa. Un caso particolare è rappresentato in Figura 5.85, in basso a destra.

[2]Questo risultato è evidente, dato che per $k = 1$ si ha $\alpha = 0$, cioè assenza di forze.