PROBLEMA 5.99

Orbita nel sistema rotante ⋆⋆

Scrivere l'equazione del moto di una particella che si muove in una forza centrale qualsiasi in un sistema di riferimento con origine sul centro di forze, e con assi che ruotano insieme alla particella.

Soluzione

La forza centrale sarà data in un sistema non rotante da

$$\vec{F} = A(r, \theta)\vec{r}$$

dove $A(r, \theta)$ è una funzione arbitraria e $\vec{r}$ il vettore posizione della particella ($r = |\vec{r}|$). Scegliamo un sistema rotante con asse x nella direzione della particella. Potremo scrivere l'equazione del moto lungo tale asse nella forma

$$m\ddot{x} = A\left(x, \theta(t)\right) x + m\dot{\theta}^2(t)x$$

dove si è tenuto conto della forza centrifuga e $\theta(t)$ è l'angolo di rotazione, che non possiamo conoscere prima di avere risolto il problema.

Nel sistema scelto la particella non accelera in direzione y, quindi la relativa equazione del moto diviene una condizione di equilibrio

$$m\ddot{y} = 0 = -mx\ddot{\theta}(t) - 2m\dot{x}\dot{\theta}(t)$$

Infatti moltiplicando per onservazione del momento angolare. Infatti moltiplicando per x troviamo

$$mx^2\ddot{\theta}(t) + 2mx\dot{x}\dot{\theta}(t) = 0$$

ma questo si può anche scrivere come

$$\frac{d}{dt}\left[mx^2\dot{\theta}(t)\right] = 0$$

e la quantità tra parentesi è esattamente il momento angolare della particella in un sistema non rotante

$$mx^2\dot{\theta}(t) = L$$

In conclusione possiamo scrivere le equazioni del moto nella forma

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= A\left(x, \theta\right) x + \frac{L^2}{mx^3} \\ \dot{\theta} &= \frac{L}{mx^2} \end{aligned}$$

Se A non dipende dall'angolo θ abbiamo un'ulteriore legge di conservazione. Infatti

$$m\ddot{x}\dot{x} = A\left(x\right) x\dot{x} + \frac{L^2}{mx^3}\dot{x}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) &= \frac{d}{dt}\int\left[A(x)x+\frac{L^2}{mx^3}\right]\dot{x}dt \\
&= \frac{d}{dt}\int\left[A(x)x+\frac{L^2}{mx^3}\right]dx \\
&= \frac{d}{dt}\left[\int A(x)xdx-\frac{L^2}{2mx^2}\right]
\end{aligned}$$

Riconosciamo la legge di conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\int A(x)xdx+\frac{L^2}{2mx^2}=E$$

dove l'integrale da l'energia potenziale corrispondente alla forza, e $L^2/(2mx^2)$ è il potenziale centrifugo. Quindi il potenziale efficace

$$U_{eff}=U+\frac{L^2}{2mx^2}$$

può essere interpretato come potenziale che descrive le forze nel sistema che ruota insieme alla particella.