PROBLEMA 5.9

Oscillatore con attrito ⋆⋆

Studiare il moto di una massa m che si muove su un piano orizzontale vincolata ad una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, in presenza di attrito statico e dinamico descritto da coefficienti μ_s e μ_d.

Soluzione

Possiamo distinguere tre casi, a seconda della velocità della massa. Quando questa è nulla possiamo scrivere l'equazione del moto nella forma

$$ma = -kx + F_s$$

dove F_s è l'attrito statico. Esso compenserà la forza di richiamo della molla quando

$$k|x| < \mu_s mg$$

e quindi la massa rimarrà in equilibrio nell'intervallo

$$-\frac{\mu_s mg}{k} \le x \le \frac{\mu_s mg}{k} \tag{5.9.1}$$

in caso contrario verrà accelerato, e si dovranno considerare i casi che seguono.

Quando la velocità della massa è diversa da zero possiamo scrivere le equazioni del moto nella forma

$$ma + kx = \mp\mu_d mg$$

dove il segno negativo si riferisce al caso $v > 0$ e quello positivo al caso $v < 0$. In ciascun caso l'equazione del moto è quella di un oscillatore armonico sottoposto ad una forza costante:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mp\mu_d g$$

dove abbiamo posto $\omega^2 = k/m$. La soluzione generale sarà la somma della soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, cioè

$$x = A_\pm \cos\omega t + B_\pm \sin\omega t$$

e di una soluzione particolare dell'equazione completa. In questo caso possiamo vedere che la funzione costante

$$x = \mp\frac{\mu_d g}{\omega^2}$$

soddisfa il problema, la soluzione completa sarà quindi

$$x = A_\pm \cos\omega t + B_\pm \sin\omega t \mp \frac{\mu_d g}{\omega^2}\,.$$

Dobbiamo adesso raccordare la soluzione valida per $v > 0$ e quella valida per $v < 0$. Chiaramente il raccordo avverrà in un punto di inversione del moto. Immaginiamo che inizialmente la massa sia in quiete in un punto $x = -L < -\mu_s mg/k$. Dobbiamo considerare il caso $v > 0$, e imponendo le condizioni iniziali avremo

$$x^{(0)}(t) = \left(\frac{\mu_d g}{\omega^2} - L\right)\cos\omega t - \frac{\mu_d g}{\omega^2}\,.$$

La velocità resterà positiva per mezzo periodo, $T = 2\pi/\omega$. Per $t = T/2$ la particella sarà nuovamente in quiete nel punto

$$x^{(0)}(T/2) = L - 2\frac{\mu_d g}{\omega^2}\,.$$

Se

$$x^{(0)}(T/2) = L - 2\frac{\mu_d g}{\omega^2} < \frac{\mu_d g}{\omega^2}$$

la particella si fermerà definitivamente, altrimenti da questo momento dovremo considerare il caso $v < 0$. Imponendo le condizioni $x(T/2) = x^{(0)}(T/2)$e $v(T/2) = 0$ troviamo la nuova soluzione,

$$x^{(1)}(t) = \left(L - 3\frac{\mu_d g}{\omega^2}\right)\cos\omega\left(t - \frac{T}{2}\right) + \frac{\mu_d g}{\omega^2}$$

che sarà valida per il successivo mezzo periodo. Avremo infine

$$x^{(1)}(T) = -L + 4\frac{\mu_d g}{\omega^2}\,.$$

Ripetendo il ragionamento vediamo che dopo ogni mezza oscillazione la distanza del punto di inversione dall'origine si ridurrà di $2\mu_d g/\omega^2$, sino a quando non verrà a trovarsi all'interno dell'intervallo (5.9.1), dove il moto terminerà.