PROBLEMA 6.10

Tensore di inerzia di un parallelepipedo ⋆⋆

Calcolare il tensore di inerzia di un parallelepipedo di lati a, b e c e massa totale M distribuita omogeneamente, in un sistema di riferimento opportunamente scelto.

Soluzione

Scegliendo l'origine del sistema di riferimento nel centro di massa e gli assi $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ paralleli ai lati di lunghezza a, b e c rispettivamente, abbiamo che il tensore di inerzia è diagonale. Infatti la distribuzione di massa è invariante rispetto alla riflessione $x \to -x$, mentre I_{xy} e I_{xz} cambiamo segno, per cui deve essere $I_{xy} = 0$ e $I_{xz} = 0$. Ragionando allo stesso modo per la riflessione $y \to -y$ si conclude che deve essere anche $I_{yz} = 0$.

Calcoliamo adesso esplicitamente I_{zz}:

$$I_{zz} = \int dm \, (x^2 + y^2)$$

ossia

$$I_{zz} = \int \rho \, dV \, (x^2 + y^2) \, .$$

Utilizzando coordinate cartesiane e $\rho = M/V = M/(abc)$ abbiamo

$$I_{zz} = \frac{M}{abc} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz (x^2 + y^2) \, .$$

L'integrale in z è immediato:

$$I_{zz} = \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy (x^2 + y^2)$$

e quello in y da

$$I_{zz} = \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} dx (x^2 b + \frac{1}{12} b^3)$$

infine

$$I_{zz} = \frac{M}{ab} (\frac{1}{12} a^3 b + \frac{1}{12} a b^3) = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$

Il risultato per I_{yy} e I_{xx} si ottiene immediatamente sostituendo a e b con le lunghezze dei lati perpendicolari all'asse considerato:

$$I_{xx} = \frac{M}{12} (b^2 + c^2)$$

$$I_{yy} = \frac{M}{12} (a^2 + c^2)$$