PROBLEMA 6.14

Tensore di inerzia di una distribuzione lineare di massa ⋆⋆

Mostrare che il determinante di un tensore di inerzia è zero se e solo se la massa è distribuita su una retta passante per l'origine.

Soluzione

Dimostriamo la sufficienza. Dato che il determinante è invariante per rotazioni del sistema di coordinate, possiamo scegliere senza perdere di generalità una distribuzione di massa lungo l'asse z. Il tensore di inerzia è allora diagonale, perchè per tutti i punto $x = 0$ e $y = 0$ e quindi tutti i prodotti del tipo xy, xz e yz sono nulli. Inoltre

$$I_{zz} = \int dm\,(x^2 + y^2) = 0$$

da cui segue subito che il determinante è nullo.

Dimostriamo ora la necessità. Per quanto detto in precedenza possiamo sempre scegliere un sistema di riferimento nel quale il tensore è diagonale. Se il determinante è nullo allora almeno uno di I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} deve esserlo. Supponiamo ad esempio che sia $I_{zz} = 0$, allora per tutti i punti dovrà essere $x = 0$ e $y = 0$ e la massa sarà distribuita sull'asse z. Analogamente negli altri due casi.