PROBLEMA 6.16

Sbarra su rulli rotanti ⋆⋆

Una sbarra di lunghezza ℓ e massa m è appoggiata su due rulli di raggio ρ che ruotano con velocità angolare costante $-\omega_0$ e ω_0 attorno al loro asse, come in Figura 6.4. La distanza tra i rulli è $2a < \ell$ e tra essi e la sbarra c'è attrito, descritto da coefficienti μ_s e μ_d (gli stessi per entrambi i rulli). Supponendo la velocità della sbarra piccola in modulo rispetto a $|\rho\omega_0|$ Scrivere l'equazione del moto per il movimento orizzontale della sbarra e studiare la possibilità di soluzioni oscillatorie.

Figura 6.4.: La sbarra appoggiata sui rulli rotanti considerata nel problema. Viene indicata la direzione di rotazione.

Soluzione

Scriviamo anzitutto le equazioni del moto. L'accelerazione verticale della sbarra è nulla, quindi

$$N_1 + N_2 - mg = 0$$

dove N_1 e N_2 sono le reazioni normali dei cilindri. Inoltre la sbarra non ruota, e quindi il momento totale applicato ad essa deve essere nullo. Calcolando i momenti rispetto al centro di massa della sbarra abbiamo

$$-N_1\,(a+x) + N_2\,(a-x) = 0$$

dove x è lo spostamento del centro di massa della sbarra rispetto al punto intermedio tra i due contatti. Risolvendo otteniamo

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{mg}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right) \\ N_2 &= \frac{mg}{2}\left(1+\frac{x}{a}\right) . \end{aligned}$$

Scriviamo adesso l'equazione per il moto orizzontale della sbarra. Tenendo conto che la velocità della sbarra non supera mai in modulo quella del rullo al punto di contatto possiamo scrivere per $\omega_0 > 0$

$$m\ddot{x} = \mu_d\,(N_1 - N_2) = -\frac{\mu_d mg}{a}x$$

che descrive una oscillazione armonica di periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{\mu_d g}}\,.$$

Nel caso $\omega_0 < 0$ abbiamo invece

$$m\ddot{x} = -\mu_d\left(N_1 - N_2\right) = \frac{\mu_d m g}{a} x$$

che descrive una soluzione del tipo

$$x = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}$$

con

$$\Omega = \sqrt{\frac{\mu_d g}{a}}\,.$$