PROBLEMA 6.18

Energia di un sistema di corpi rigidi ⋆⋆

Calcolare l'energia cinetica del sistema di corpi rigidi in Figura 6.5, esprimendola in funzione della coordinata θ e assumendo condizioni di puro rotolamento tra tutti i corpi in contatto. I due cilindri hanno massa m_1, m_2, momento di inerzia rispetto al loro asse I_1, I_2 e raggio R_1, R_2. Il cilindro più esterno è immobile e ha raggio $R > R_1 + R_2$. L'asta ha massa m e momento di inerzia I rispetto all'asse passante per il suo centro di massa. Tutte le distribuzioni di massa sono omogenee.

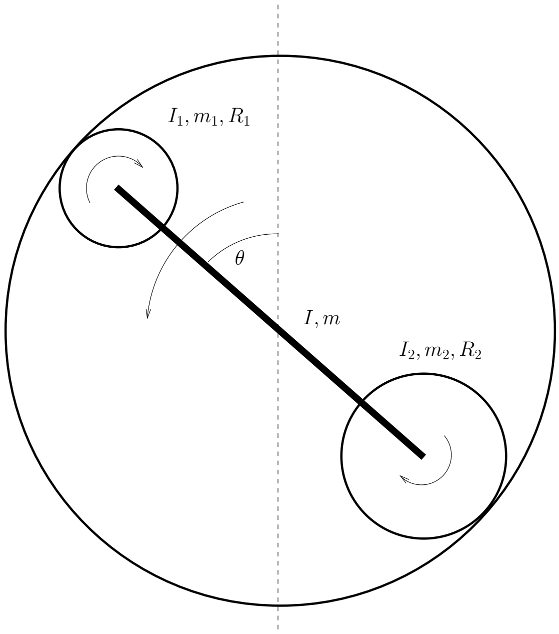

Figura 6.5.: Il sistema di corpi rigidi considerato nel problema.

Soluzione

Date le condizioni di rotolamento puro, il sistema ha un unico grado di libertà. Utilizzeremo come coordinata per descriverlo l'angolo θ in figura. Per scrivere l'energia cinetica, sommiamo i contributi dei diversi corpi rigidi presenti.

Per quanto riguarda l'asta, osserviamo che essa ruota attorno al punto posto al centro del cilindro grande con velocità angolare $\dot{\theta}$. Possiamo scrivere quindi

$$K_{asta} = \frac{1}{2} I_{asta} \dot{\theta}^2 \tag{6.18.1}$$

dove I è il momento di inerzia rispetto all'asse passante per il punto fisso

$$I_{asta} = \frac{m}{\ell_1 + \ell_2} \int_{-\ell_1}^{\ell_2} r^2 dr = \frac{1}{3} \frac{m}{\ell_1 + \ell_2} \left(\ell_2^3 + \ell_1^3\right) = \frac{m}{3} \left(\ell_1^2 + \ell_2^2 - \ell_1 \ell_2\right) \tag{6.18.2}$$

dove $\ell_1 = R - R_1$ e $\ell_2 = R - R_2$ sono le lunghezze dei due segmenti dell'asta con un estremo nel centro di rotazione.

Possiamo considerare il moto dei due cilindri come una pura rotazione attorno al punto di contatto. Quindi serve calcolare le velocità angolari. Osserviamo che il centro del primo cilindro si muove con velocità

$$v_1 = \ell_1 \dot{\theta} \tag{6.18.3}$$

ma d'altra parte deve essere anche

$$v_1 = -\omega_1 R_1 \tag{6.18.4}$$

ed eguagliando le due espressioni si ottiene

$$\omega_1 = -\frac{\ell_1}{R_1} \dot{\theta} = -\frac{R - R_1}{R_1} \dot{\theta} \tag{6.18.5}$$

Ragionando nello stesso modo per il secondo cilindro si trova

$$\omega_2 = -\frac{\ell_2}{R_2} \dot{\theta} = -\frac{R - R_2}{R_2} \dot{\theta} \tag{6.18.6}$$

Mettendo insieme tutti i termini otteniamo infine

$$K = \frac{1}{2} I_{asta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(I_1 + m_1 R_1^2\right) \omega_1^2 + \frac{1}{2} \left(I_2 + m_2 R_2^2\right) \omega_2^2 \tag{6.18.7}$$

dove

$$I_{1,2} = \frac{1}{2} m_{1,2} R_{1,2}^2 \,. \tag{6.18.8}$$