PROBLEMA 6.26

Trottola simmetrica ⋆⋆⋆

Una trottola simmetrica è costituita da un corpo rigido con simmetria di rotazione attorno ad un asse. Un suo estremo viene vincolato come in Figura 6.15, per il resto è lasciata libera di ruotare su se stessa e attorno al vincolo. Si vogliono discutere le caratteristiche del suo moto, fissate le condizioni iniziali. In particolare si vuole studiare cosa accade se inizialmente il centro di massa della trottola è fermo. In questo primo esercizio verranno impostate le equazioni necessarie.

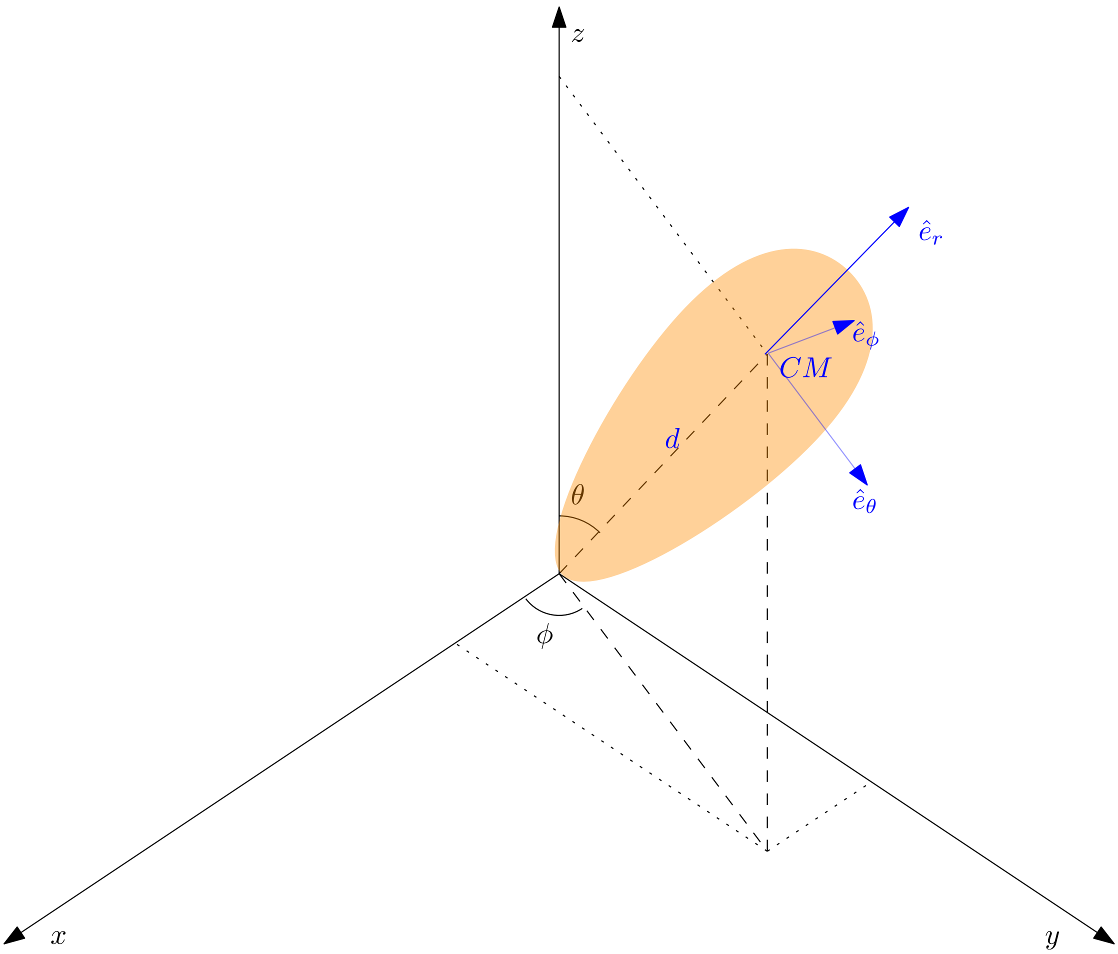

Figura 6.15.: Le coordinate usate per lo studio della trottola simmetrica.

Soluzione

Utilizziamo coordinate sferiche per determinare la posizione del centro di massa del corpo rigido rispetto all'origine del sistema delle coordinate. Abbiamo

$$\vec{r}_{CM} = d\hat{e}_r \tag{6.26.1}$$

dove abbiamo indicato con d la distanza tra il vincolo e il centro di massa, costante. Fissato il centro di massa, il corpo rigido può ancora ruotare su se stesso. In linea di principio avremmo bisogno di una terza coordinata, che però come vedremo non gioca alcun ruolo nel caso considerato. Per il seguito scriviamo esplicitamente l'espressione dei versori $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ e $\hat{e}_\phi$ di cui ci serviremo:

$$\begin{aligned}
\hat{e}_r &= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\
\hat{e}_\theta &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \\
\hat{e}_\phi &= \begin{pmatrix} \sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Abbiamo due evidenti leggi di conservazione.

1. L'energia totale, somma di energia cinetica e di energia potenziale gravitazionale. Infatti l'unica altra forza esterna presente è la reazione vincolare, che non compie lavoro dato che il punto a cui è applicata non si muove.

2. La componente verticale del momento angolare, considerando come polo il punto a cui la trottola è vincolata. Infatti l'unica forza con un momento è la forza di gravità. Dato che essa è verticale il suo momento non avrà mai una componente lungo l'asse z.

L'energia cinetica si può scrivere come e

$$U = Mgz_{CM} = Mgd\cos\theta \tag{6.26.2}$$

L'energia cinetica si può scrivere come energia di rotazione attorno al punto vincolato, e quindi

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \cdot \boldsymbol{I} \cdot \vec{\omega} \tag{6.26.3}$$

dove $\boldsymbol{I}$ è il tensore di inerzia della trottola e $\vec{\omega}$ la velocità angolare del corpo rigido. Invece per il momento angolare si ha

$$\vec{L} = \boldsymbol{I}\vec{\omega} \tag{6.26.4}$$

Il tensore di inerzia si scrive facilmente in un sistema di riferimento con gli assi allineati agli assi principali di inerzia della trottola. Ma questo sistema di riferimento è determinato dai tre versori $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ e $\hat{e}_\phi$ legati alle coordinate sferiche utilizzate. Osserviamo che possiamo scrivere

$$\boldsymbol{I} = I_1 \hat{e}_r \hat{e}_r^T + I_2 \hat{e}_\theta \hat{e}_\theta^T + I_2 \hat{e}_\phi \hat{e}_\phi^T \tag{6.26.5}$$

Nello scrivere l'espressione precedente abbiamo tenuto conto del fatto che $\hat{e}_A \hat{e}_A^T$ è il proiettore lungo la direzione $\hat{e}_A$. Inoltre il momento di inerzia rispetto all'asse $\hat{e}_\theta$ è identico a quello rispetto all'asse $\hat{e}_\phi$, dato che la trottola è simmetrica. Infine, dato che la somma dei tre proiettori è la matrice identica $\mathbf{1}$ possiamo scrivere

$$\boldsymbol{I} = I_1 \hat{e}_r \hat{e}_r^T + I_2 \left(\mathbf{1} - \hat{e}_r \hat{e}_r^T \right) = I_2 \mathbf{1} + (I_1 - I_2) \hat{e}_r \hat{e}_r^T \tag{6.26.6}$$

Analogamente la velocità angolare si potrà scrivere nella forma

$$\vec{\omega} = \omega_r \hat{e}_r + \omega_\theta \hat{e}_\theta + \omega_\phi \hat{e}_\phi \tag{6.26.7}$$

e il momento angolare usando l'Equazione (6.26.4) sarà

$$\begin{aligned} \vec{L} &= L_r \hat{e}_r + L_\theta \hat{e}_\theta + L_\phi \hat{e}_\phi & (6.26.8) \\ &= I_1 \omega_r \hat{e}_r + I_2 \omega_\theta \hat{e}_\theta + I_2 \omega_\phi \hat{e}_\phi & (6.26.9) \end{aligned}$$

L'energia si può quindi scrivere nella forma

$$E = \frac{1}{2} \left[I_1 \omega_r^2 + I_2 \left(\omega_\theta^2 + \omega_\phi^2 \right) \right] + Mgd \cos\theta \tag{6.26.10}$$

e la componente verticale del momento angolare

$$\begin{aligned} L_z &= \hat{e}_z \cdot \vec{L} = L_r \hat{e}_z \cdot \hat{e}_r + L_\theta \hat{e}_z \cdot \hat{e}_\theta + L_\phi \hat{e}_z \cdot \hat{e}_\phi \\ &= L_r \cos\theta - L_\theta \sin\theta & (6.26.11) \end{aligned}$$

Mostriamo adesso che anche L_r si conserva. Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{dL_r}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\vec{L} \cdot \hat{e}_r \right) = \frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \hat{e}_r + \vec{L} \cdot \frac{d\hat{e}_r}{dt} \\ &= \vec{M} \cdot \hat{e}_r + \vec{L} \cdot (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_r) & (6.26.12) \end{aligned}$$

dove $\vec{M}$ è il momento delle forze esterne e si è tenuto conto che, dato che $\hat{e}_r$ è solidale al corpo rigido[1], vale

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_r \tag{6.26.13}$$

I due termini della (6.26.12) si annullano: il primo perchè $\vec{M} = \vec{r}_{cm} \wedge (-Mg\hat{e}_z)$ è ortogonale a $\hat{e}_r$, il secondo perchè

$$\vec{L} \cdot (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_r) = \vec{\omega} \cdot \boldsymbol{I} \cdot (\vec{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}) \tag{6.26.14}$$

[1]Notare che $\hat{e}_\phi$ e $\hat{e}_\theta$ <u>*non*</u> sono solidali al corpo rigido.

ma dato che $\vec{\omega} \wedge \hat{e}_r$ è perpendicolare a $\hat{e}_r$ sarà $\boldsymbol{I} \cdot (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_r) = I_2 (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_r)$ e quindi

$$\vec{\omega} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \left(\vec{\mathbf{!}} \wedge \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}\right) = I_2 \vec{\omega} \cdot \left(\vec{\mathbf{!}} \wedge \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}\right) = 0 \tag{6.26.15}$$

perchè $\vec{\omega} \wedge \hat{e}_r$ è ortogonale anche a $\vec{\omega}$.

Possiamo ora scrivere l'energia nella forma

$$E = \frac{1}{2}\left[\frac{L_r^2}{I_1} + \frac{L_\theta^2}{I_2} + I_2\omega_\phi^2\right] + Mgd\cos\theta \tag{6.26.16}$$

ed anche, utilizzando la (6.26.11), come

$$E = \frac{L_r^2}{2I_1} + \frac{1}{2I_2}\left(\frac{L_r\cos\theta - L_z}{\sin\theta}\right)^2 + \frac{I_2}{2}\omega_\phi^2 + Mgd\cos\theta \tag{6.26.17}$$

La componente L_ϕ del momento angolare non è costante, ma può essere espressa in funzione della coordinata. Per farlo scriviamo esplicitamente l'Equazione (6.26.13). Abbiamo

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi \\ \omega_r & \omega_\theta & \omega_\phi \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ossia

$$\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\hat{e}_\phi = \omega_\phi\hat{e}_\theta - \omega_\theta\hat{e}_\phi$$

che ci permette di scrivere due componenti della velocità angolare in funzione delle coordinate

Sostituendo nell'energia otteniamo infine

$$E = \frac{I_2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{L_r^2}{2I_1} + \frac{1}{2I_2}\left(\frac{L_r\cos\theta - L_z}{\sin\theta}\right)^2 + Mgd\cos\theta \tag{6.26.18}$$

equivalente a quella di una particella descritta da una coordinata θ in un potenziale efficace

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{2I_2}\left(\frac{L_r\cos\theta - L_z}{\sin\theta}\right)^2 + Mgd\cos\theta + \frac{L_r^2}{2I_1} \tag{6.26.19}$$

La discussione delle soluzioni possibili sarà fatta nell'Esercizio 6.35.