PROBLEMA 6.27

Scontro tra cubetti di ghiaccio ⋆⋆

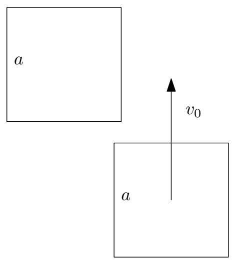

Figura 6.16.: Le condizioni iniziali per i due cubetti. Il primo è fermo, il secondo ha un moto traslatorio con una velocità verticale $\vec{v} = v_0 \hat{y}$. Le facce dei due cubeti sono parallele, l'urto avviene su una regione molto piccola vicino ad uno spigolo di ciascun cubetto.

Un cubetto di ghiaccio di lato a è fermo sopra ad una superficie orizzontale priva di attrito. Un altro cubetto, identico, gli viene lanciato contro con velocità $\vec{v} = v_0 \hat{y}$ come in Figura 6.16. La densità di massa all'interno del cubetto è distribuita in modo non noto, ma si sa che il tensore di inerzia rispetto al centro di massa è proporzionale all'identità. Inoltre il centro di massa si trova nel centro del cubo. Si conoscono la massa totale m e il momento di inerzia I rispetto ad un asse qualsiasi passante per il centro di massa.

L'urto è elastico ed istantaneo, e si vogliono calcolare le velocità lineari e angolari (inizialmente nulle) dei due cubetti dopo l'urto. Inoltre si vuole sapere se i cubetti si urtano nuovamente dopo il primo impatto. Discutere il risultato al variare di m e I.

Soluzione

Dato che non sono presenti forze esterne (orizzontali) si conserva la quantità di moto totale del sistema. Conviene studiare l'urto in un sistema di riferimento solidale al centro di massa del sistema. In esso la situazione prima dell'urto è quella in Figura 6.17, a sinistra, e la quantità di moto totale è nulla.

Per determinare le 2 componenti delle 2 velocità finali e le due velocità angolari ci servono 6 leggi di conservazione, che sono le seguenti:

1. La quantità di moto totale totale lungo x (non ci sono forze esterne lungo x):

$$0 = mv_{1,x} + mv_{2m,x} \tag{6.27.1}$$

2. La quantità di moto totale lungo y (non ci sono forze esterne lungo y):

$$0 = mv_{1,y} + mv_{2,y} \tag{6.27.2}$$

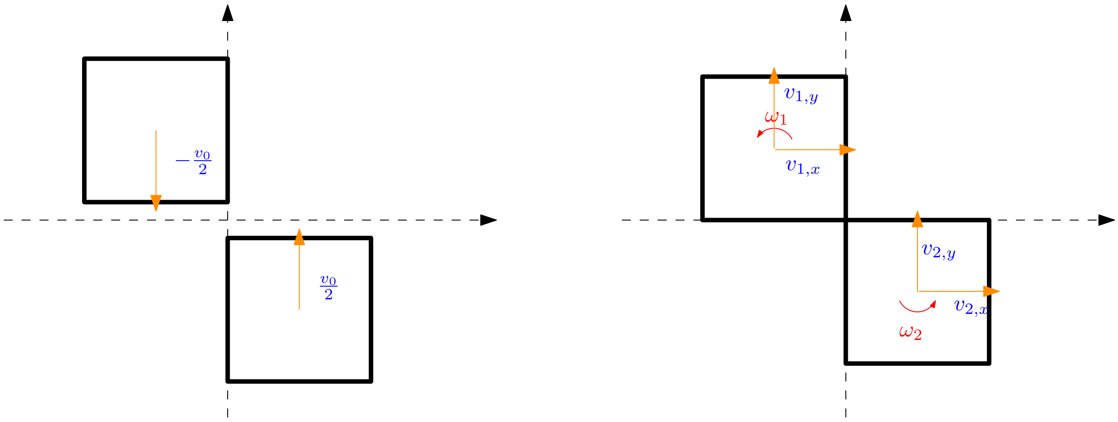

Figura 6.17.: Le posizioni e le velocità dei due cubi in un sistema solidale col centro di massa (posto nell'origine) immediatamente prima (a sinistra) e immediatamente dopo (a destra) l'urto.

3. L'energia (l'urto è elastico):

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2\times 2=\frac{1}{2}m\left(v_{1,x}^2+v_{1,y}^2\right)+\frac{1}{2}m\left(v_{2,x}^2+v_{2,y}^2\right)+\frac{1}{2}I\omega_1^2+\frac{1}{2}I\omega_2^2 \tag{6.27.3}$$

4. Il momento angolare totale perpendicolare al piano xy rispetto all'origine del sistema di coordinate:

$$m\frac{v_0}{2}\frac{a}{2}\times 2=-m\left(v_{1,x}\frac{a}{2}+v_{1,y}\frac{a}{2}\right)+m\left(v_{2,x}\frac{a}{2}+v_{2,y}\frac{a}{2}\right)+I\omega_1+I\omega_2 \tag{6.27.4}$$

5. La quantità di moto orizzontale di ogni cubetto (le forze impulsive durante l'urto sono perpendicolari alla superficie di contatto e quindi verticali). Queste sono due leggi di conservazione, ma non sono indipendenti dato che la loro somma da la conservazione della quantità di moto totale lungo x considerata precedentemente:

$$0=mv_{1,x} \tag{6.27.5}$$
$$0=mv_{2,x} \tag{6.27.6}$$

6. Il momento angolare totale di ciascun cubetto non cambia (le forze impulsive durante l'urto sono applicate nell'origine, che abbiamo preso come polo, ed hanno quindi momento nullo). Anche in questo caso le due leggi di conservazione non sono indipendenti, dato che la loro somma da la conservazione del momento angolare totale:

$$m\frac{v_0}{2}\frac{a}{2}=-m\left(v_{1,x}\frac{a}{2}+v_{1,y}\frac{a}{2}\right)+I\omega_1 \tag{6.27.7}$$
$$m\frac{v_0}{2}\frac{a}{2}=m\left(v_{2,x}\frac{a}{2}+v_{2,y}\frac{a}{2}\right)+I\omega_2 \tag{6.27.8}$$

Dalle (6.27.5) e (6.27.6) concludiamo immediatamente che i cubetti si muovono in direzione verticale subito dopo l'urto. Inoltre dalla (6.27.2) segue che le velocità verticali saranno uguali ed opposte. Riscriviamo adesso la (6.27.3), la (6.27.7) e la (6.27.8) nella forma

$$\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = v_{1,y}^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{m}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) \tag{6.27.9}$$

$$\frac{v_0}{2} = -v_{1,y} + \frac{2I}{ma}\omega_1 \tag{6.27.10}$$

$$\frac{v_0}{2} = -v_{1,y} + \frac{2I}{ma}\omega_2 \tag{6.27.11}$$

Sottraendo membro a membro le ultime due troviamo $\omega_1 = \omega_2$ (i due cubetti ruotano nello stesso verso). Sommandole abbiamo invece

$$v_{1,y} = \frac{2I}{ma}\omega_1 - \frac{1}{2}v_0$$

Sostituendo infine nell'energia abbiamo

$$\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{2I}{ma}\omega_1 - \frac{1}{2}v_0\right)^2 + \frac{I}{m}\omega_1^2 \tag{6.27.12}$$

da cui

$$\left(1 + \frac{4I}{ma^2}\right)\omega_1^2 - \frac{2v_0}{a}\omega_1 = 0$$

La soluzione $\omega_1 = 0$ è compatibile con le leggi di conservazione, ma non con il fatto che l'urto sia realmente avvenuto (le velocità non cambiano). La seconda soluzione invece è

$$\omega_1 = \frac{2}{\left(1 + \frac{4I}{ma^2}\right)}\frac{v_0}{a} \tag{6.27.13}$$

$$v_{1,y} = -\left[1 - \frac{\frac{8I}{ma^2}}{\left(1 + \frac{4I}{ma^2}\right)}\right]\frac{1}{2}v_0 \tag{6.27.14}$$

Se

$$I > \frac{1}{4}ma^2 \tag{6.27.15}$$

le velocità dei cubetti cambiano verso in seguito all'urto, e quindi non si urtano una seconda volta. Altrimenti avviene una nuova collisione. Se la massa è distribuita uniformemente nel cubetto abbiamo

$$I = \frac{1}{6}ma^2 \tag{6.27.16}$$

e quindi si ha una seconda collisione.