PROBLEMA 6.28

Moto su una sbarra rotante ★★

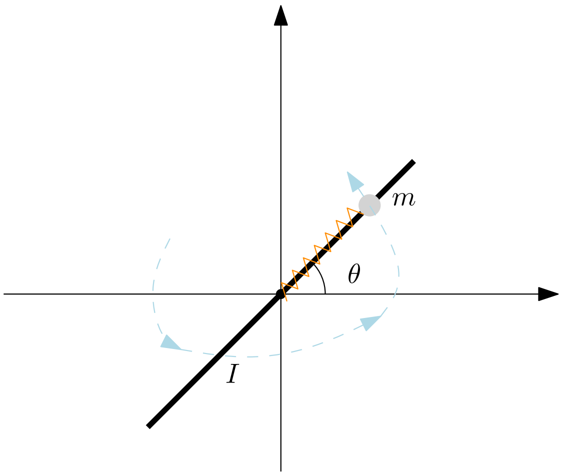

Figura 6.18.: Il sistema da studiare. La sbarra può ruotare liberamente attorno al suo punto medio, la massa scorre su di essa liberamente. La molla ha costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile.

Una sbarra di lunghezza ℓ e momento di inerzia I può ruotare liberamente attorno al suo punto medio in un piano orizzontale. Su di essa può scorrere una massa m, fissata al centro di rotazione con una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile. Discutere qualitativamente le possibili orbite della massa, al variare delle condizioni iniziali.

Soluzione

L'energia totale del sistema si conserva. Introducendo coordinate polari per descrivere la posizione della massa (e della sbarra) e fissando l'origine nel punto medio della sbarra possiamo scrivere

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{k}{2}r^2$$

L'unica forza esterna che agisce sul sistema è la reazione vincolare applicata al centro di rotazione. Dato che rispetto ad esso ha momento nullo, si conserverà anche il momento angolare totale

$$L = mr^2\dot{\theta} + I\dot{\theta}$$

Possiamo ricavare $\dot{\theta}$ da quest'ultima relazione

$$\dot{\theta} = \frac{L}{I + mr^2}$$

e sostituendo otteniamo una energia efficace che dipende solo dalla coordinata radiale

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{I + mr^2} + \frac{k}{2}r^2$$

Possiamo adesso studiare qualitativamente le orbite a partire dal potenziale efficace [2]

Anzitutto $U_{eff}(0) = L^2/2I$, e $\lim_{r\to\infty} U_{eff}(r) = +\infty$. Derivando otteniamo

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = r\left[k - \frac{L^2 m}{(I + mr^2)^2}\right]$$

che si annulla per $r = 0$ e per [3]

$$r_{min} = \sqrt{\frac{L}{\sqrt{km}} - \frac{I}{m}} \tag{6.28.1}$$

se [4]

$$L > I\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6.28.2}$$

Possiamo adesso discutere le orbite al variare di L e di E. Distinguiamo due casi:

1. $L > I\sqrt{k/m}$. Questo corrisponde al grafico blu in Figura 6.19. Abbiamo un minimo del potenziale effettivo, associato ad un'orbita circolare di raggio r_{min} che si ottiene quando l'energia vale

   $$E = E_1 = U_{eff}(r_{min})$$

   Il periodo dell'orbita si determina direttamente dalla velocità angolare,

   $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{I + mr^2_{min}}{L}$$

   Per valori dell'energia compresi tra E_1 ed E_2 la massa si muove tra un raggio minimo e un raggio massimo determinato delle soluzioni di $U_{eff}(r) = E$. Quando $E = E_2$ abbiamo una possibile soluzione nella quale la massa è ferma nell'origine,

[2] Esprimendo questa relazione nella forma

$$\frac{mU_{eff}}{kI} = \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{kI^2}\frac{1}{1+\frac{mr^2}{I}} + \frac{mr^2}{I}\right)$$

otteniamo una relazione tra i parametri adimensionali $u = mk^{-1}I^{-1}U_{eff}$, $\rho = mI^{-1}r^2$ e $\ell^2 = mk^{-1}I^{-2}L^2$

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{\ell^2}{1+\rho^2} + \rho^2\right)$$

dalla quale risulta evidente che le caratteristiche qualitative dell'orbita possono solo dipendere da ℓ, come sarà evidente nel seguito.

[3] In termini delle variabili adimensionali introdotte precedentemente, per $\rho = \sqrt{\ell - 1}$.

[4] Cioè per $\ell > 1$.

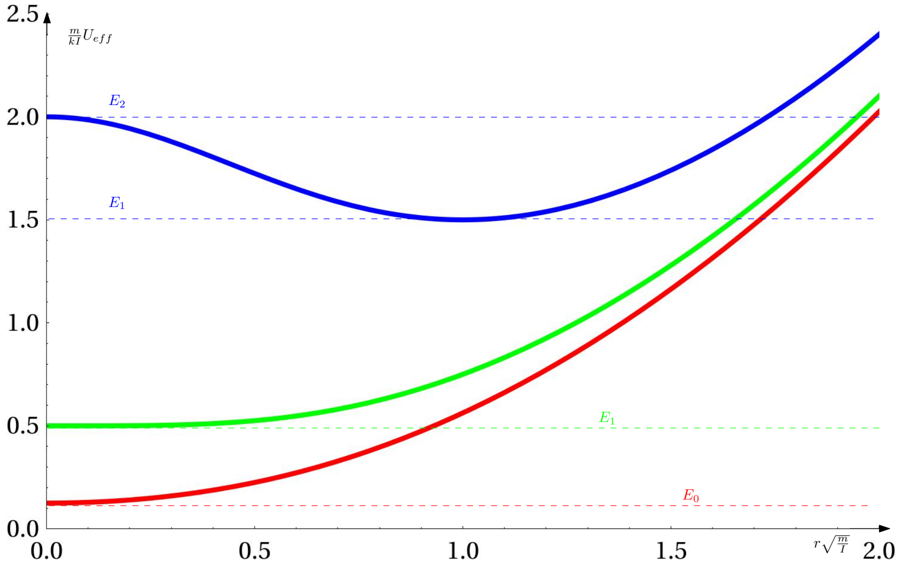

Figura 6.19.: Il potenziale effettivo U_{eff}. Sulle ascisse è riportato il valore di $r\sqrt{m/I}$ e sulle ordinate di $mk^{-1}I^{-1}U_{eff}(r)$ al variare di $LI^{-1}\sqrt{m/k}$. In particolare la curva rossa è ottenuta per $LI^{-1}\sqrt{m/k} = 1/2$, quella verde per $LI^{-1}\sqrt{m/k} = 1$ e quella blu per $LI^{-1}\sqrt{m/k} = 2$.

mentre l'asta ruota con la velocità angolare $\omega = L/I$. La massa è in equilibrio instabile: se perturbata percorre un'orbita fino ad una distanza massima determinata dalla soluzione non nulla di $E_2 = U_{eff}(r)$ e torna nell'origine in un tempo infinito [5]. Infine per $E > E_2$ la riesce ad attraversare l'origine, e si allontana fino ad una distanza massima determinata dall'unica soluzione di $U_{eff}(r) = E$, per poi tornare nuovamente verso l'origine e ripetere il ciclo.

2. $L < I\sqrt{k/m}$. Questo corrisponde al grafico rosso in figura. Per $E = E_1$ la particella è ferma nell'origine, e questa volta la sua posizione di equilibrio è stabile. Per $E > E_1$ si ottengono orbite qualitativamente simili a quella discussa nel caso precedente per $E > E_2$. Il caso $L = I\sqrt{k/m}$ è qualitativamente simile a questo [6]

Concludiamo osservando che per una sbarra di lunghezza finita ℓ le orbite valide saranno quello che non si allontaneranno dall'origine più di $\ell/2$.

[5] Lo studio dettagliato di questo caso particolare sarà fatto in un esercizio successivo.

[6] Una differenza tra i due sarà l'argomento di un esercizio successivo.