PROBLEMA 6.29

Piccole oscillazioni di metà cilindro ⋆⋆⋆

La metà di un cilindro omogeneo di raggio R, massa m e altezza h è appoggiato su un piano obliquo come in Figura 6.20, ed è libero di ruotare senza strisciare. Potete indicare con b la distanza del centro di massa dall'asse del cilindro.

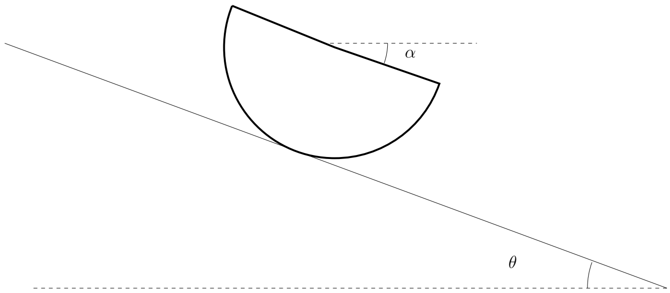

Figura 6.20.: Il semicilindro appoggiato sul piano obliquo: convenzioni per gli angoli.

1. Calcolare l'inclinazione α del cilindro nella posizione di equilibrio in funzione di θ, e l'angolo massimo θ^* per il quale l'equilibrio è possibile.

2. Se $\theta = 0$ partendo dalla posizione di equilibrio per quale velocità angolare iniziale minima il corpo si capovolge?

3. Sempre per $\theta = 0$ calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio.

Soluzione[7]

Domanda 1 Consideriamo la costruzione rappresentata in Figura 6.21. Fissato il punto di contatto P, conduciamo la perpendicolare al piano inclinato passante per esso. Su essa prendiamo il punto a distanza R da P. La circonferenza di raggio b e centro O è il luogo delle possibili posizioni del centro di massa.

Le forze che agiscono sul sistema sono l'attrito statico $\vec{F}_a$ (applicata in P) la reazione normale al vincolo $\vec{N}$ (applicata in P) e la forza di gravità $m\vec{g}$ (applicata nel centro di massa). La prima condizione di equilibrio da

$$\vec{F}_a + \vec{N} + m\vec{g} = 0 \tag{6.29.1}$$

e può sempre essere soddisfatta scegliendo opportunamente $\vec{F}_a$ e $\vec{N}$. La seconda condizione, scegliendo come polo il punto di contatto, dice che il momento rispetto a P della forza di gravità deve essere nullo. Questo significa che si avrà equilibrio solo con il centro di massa sulla verticale di P (le posizioni M e M' in Figura 6.21).

[7] Scritto del 31/1/2007

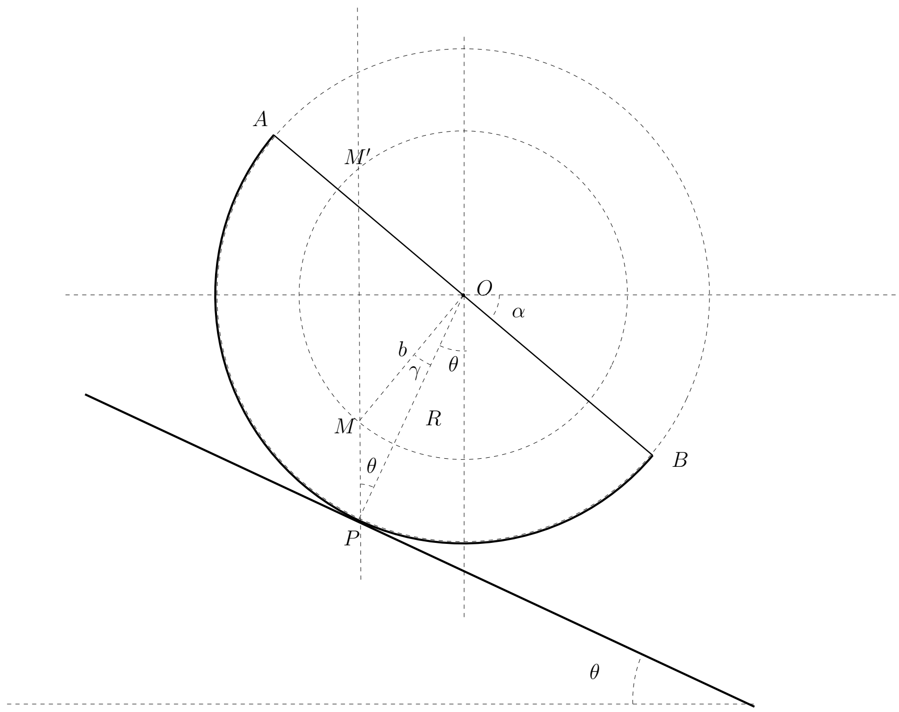

Figura 6.21.: La costruzione utilizzata per rispondere alla prima domanda.

Considerando il triangolo MPO abbiamo dal teorema dei seni la relazione

$$\frac{b}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin(\pi-\gamma-\theta)} = \frac{R}{\sin\alpha} \tag{6.29.2}$$

dato che $\gamma = \alpha - \theta$. Quindi

$$R\sin\theta = b\sin\alpha \tag{6.29.3}$$

che determina l'angolo α di equilibrio in funzione di θ. Si hanno soluzioni solo se $\sin\theta \leq b/R$, che determina il massimo valore possibile $\theta^* = \arcsin(b/R)$. Esplicitamente l'angolo di equilibrio vale

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{R}{b}\sin\theta\right) \tag{6.29.4}$$

Alternativamente dalla Figura 6.21 si vede direttamente che il valore massimo di α corrisponde a $\alpha + \theta = \pi/2$ (la retta $\overline{MM'}$ diviene tangente alla circonferenza di raggio b). Questo corrisponde a $\sin\theta^* = b/R$. Osserviamo che per piccoli spostamenti rispetto ad M del centro di massa la forza di gravità agisce come forza di richiamo. Quindi la configurazione considerata è di equilibrio stabile. Al contrario la configurazione con centro di massa in M' sarà di equilibrio instabile.

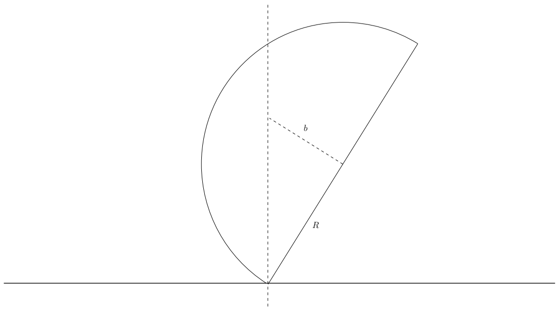

Figura 6.22.: La posizione estrema da raggiungere prima del capovolgimento.

Domanda 2 Per capovolgersi, il corpo dovrà superare la posizione di altezza massima per il suo centro di massa. Questo avviene nella situazione in Figura 6.22. Rispetto al terreno l'altezza del centro di massa è allora

$$h_f = \sqrt{b^2 + R^2} \tag{6.29.5}$$

e imponendo la conservazione dell'energia abbiamo

$$\frac{1}{2} I_P \omega_0^2 + mg\,(R - b) = mg\sqrt{b^2 + R^2} \tag{6.29.6}$$

dove I_P è il momento di inerzia del mezzo cilindro rispetto al punto di contatto, nella configurazione iniziale. Otteniamo quindi

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2mg}{I_P}\left(\sqrt{R^2 + b^2} - R + b\right)} \tag{6.29.7}$$

Per calcolare I_P osserviamo che il momento di inerzia di un cilindro intero rispetto al suo asse vale

$$I_{cil} = \frac{1}{2} M_{cil} R^2 \tag{6.29.8}$$

e quello di metà cilindro, rispetto allo stesso asse,

$$I_O = \frac{1}{2} m R^2 \tag{6.29.9}$$

(ovviamente $m = M_{cil}/2$). Usando il teorema di Steiner troviamo il momento rispetto ad un asse passante per il centro di massa

$$I_{CM} = I_O - mb^2 \tag{6.29.10}$$

ed infine, usando nuovamente il teorema, rispetto ad un asse passante per il punto di contatto iniziale

Domanda 3 Conviene scrivere l'energia cinetica come somma del contributo legato al centro di massa e della rotazione attorno ad esso:

$$K = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{cm}^2 + \dot{y}_{cm}^2\right) + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\alpha}^2 . \tag{6.29.11}$$

Le coordinate del centro di massa si possono scrivere, fissato un sistema di riferimento con origine nella posizione iniziale del punto O,

$$x_{cm} = R\alpha - b\sin\alpha \tag{6.29.12}$$
$$y_{cm} = -b\cos\alpha \tag{6.29.13}$$

da cui, aggiungendo l'energia potenziale gravitazionale mgy_{cm}, otteniamo

$$E = \frac{1}{2}m\left[(R\dot{\alpha} - b\dot{\alpha}\cos\alpha)^2 + (b\dot{\alpha}\sin\alpha)^2\right] + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\alpha}^2 - mgb\cos\alpha . \tag{6.29.14}$$

Sviluppando per piccole oscillazioni otteniamo, al secondo ordine in α e $\dot{\alpha}$,

$$E = \frac{1}{2}\left[m(R-b)^2 + I_{CM}\right]\dot{\alpha}^2 + \frac{mgb}{2}\alpha^2 - mgb . \tag{6.29.15}$$

Notare che questo si può anche scrivere, trascurando una costante irrilevante,

$$E = \frac{1}{2}I_P\dot{\alpha}^2 + \frac{mgb}{2}\alpha^2 \tag{6.29.16}$$

cioè per piccole oscillazioni si può trascurare il fatto che l'asse di rotazione cambia. L'energia appena scritta è formalmente quella di un oscillatore armonico, da cui

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{mgb}{I_P}} . \tag{6.29.17}$$