PROBLEMA 6.31

Centro di massa metà cilindro ⋆⋆

Calcolare la distanza b tra il centro di massa e l'asse del semicilindro che compare negli esercizi 6.29 e 6.30 e usatelo per confrontare le frequenze delle piccole oscillazioni trovate nei due casi.

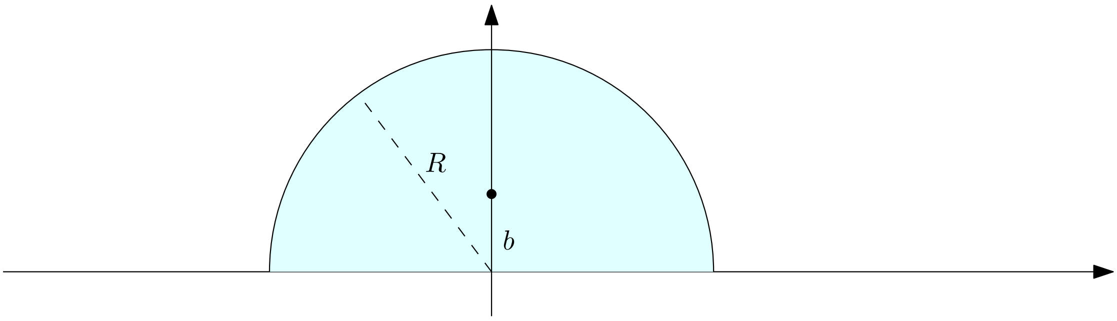

Figura 6.24.: Il sistema di coordinate utilizzato per il calcolo del centro di massa.

Soluzione

Scegliamo un sistema di coordinate come in Figura 6.24. A causa della simmetria orizzontale $x_{cm} = 0$. Per calcolare $y_{cm} = b$ calcoliamo

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y dm$$

che diviene, utilizzando coordinate polari,

$$\begin{aligned}
y_{cm} &= \frac{1}{M}\int y\frac{dm}{dS}dS \\
&= \frac{1}{M}\frac{M}{\pi R^2/2}\int\int r\sin\theta r dr d\theta \\
&= \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \\
&= \frac{2}{\pi R^2}\frac{R^3}{3}2 = \frac{4}{3\pi}R \simeq 0.424\, R
\end{aligned}$$

La frequenza delle piccole oscillazioni è, nel caso senza attrito considerato nell'Esercizio 6.30

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2gb}{R^2-b^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{8}{3\pi}}{1-\frac{16}{9\pi^2}}\frac{g}{R}} \simeq 0.162\sqrt{\frac{g}{R}}$$

e in quello con rotolamento puro considerato nell'Esercizio 6.29

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2gb}{3R^2 - 4Rb}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{8}{3\pi}}{3 - \frac{16}{3\pi}}\frac{g}{R}} \simeq 0.128\sqrt{\frac{g}{R}} \qquad (6.31.1)$$