PROBLEMA 6.32

Giro della morte per una sfera ⋆⋆

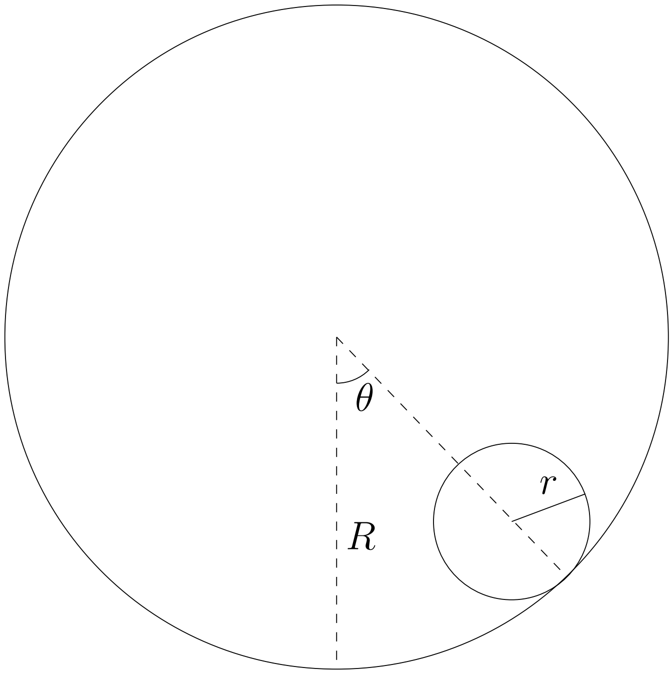

Figura 6.25.: La sfera all'interno del cilindro e la coordinata usata per descriverla.

Una sfera di massa M e raggio r rotola senza strisciare all'interno di un tubo di raggio $R > r$ come in Figura 6.25. Il tubo si comporta come un vincolo monolatero.

Scegliendo l'angolo θ come coordinata,

1. scrivere l'energia totale del sistema in funzione di θ e $\dot{\theta}$;
2. supponendo che $\theta(t = 0) = 0$, determinare il minimo valore di $\dot{\theta}(t = 0)$ che permette alla sfera di percorrere un giro completo senza staccarsi dal tubo;
3. determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

Soluzione[8]

Domanda 1

La velocità del centro di massa del cilindro si scrive

$$v_{cm} = (R - r)\dot{\theta}$$

[8]Scritto del 2 marzo 2011

ma anche, usando la condizione di rotolamento puro,

$$v_{cm} = -r\omega$$

dove ω è la velocità angolare del cilindro. Da queste due relazioni segue che

$$\omega = -\frac{R-r}{r}\dot{\theta}$$

Possiamo adesso scrivere l'energia nella forma

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - Mg(R-r)\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}M(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\left(1-\frac{R}{r}\right)^2\dot{\theta}^2 - Mg(R-r)\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}M\left[(R-r)^2 + \frac{2}{5}r^2\left(1-\frac{R}{r}\right)^2\right]\dot{\theta}^2 - Mg(R-r)\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}\frac{7}{5}M(R-r)^2\dot{\theta}^2 - Mg(R-r)\cos\theta
\end{aligned}$$

dove si è utilizzato il momento di inerzia della sfera, $I = 2Mr^2/5$. Notare che il termine cinetico si può anche scrivere nella forma

$$E_c = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{5}Mr^2\right]\left[\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\theta}^2\right] = \frac{1}{2}I'\omega^2$$

dove $I' = 7Mr^2/5$ è il momento di inerzia della sfera rispetto al punto di contatto.

Domanda 2

La componente radiale dell'equazione del moto del centro di massa della sfera si scrive

$$-M(R-r)\dot{\theta}^2 = -N + Mg\cos\theta$$

da cui è possibile calcolare la reazione vincolare.

$$N = Mg\cos\theta + M(R-r)\dot{\theta}^2$$

La sfera rimarrà aderente al vincolo se $N \geq 0$, cioè

$$g\cos\theta + (R-r)\dot{\theta}^2 \geq 0 \tag{6.32.1}$$

Dalla conservazione dell'energia possiamo ora determinare $(R-r)\dot{\theta}^2$ in funzione di θ:

$$\frac{1}{2}\frac{7}{5}M(R-r)^2\dot{\theta}_0^2 - Mg(R-r) = \frac{1}{2}\frac{7}{5}M(R-r)^2\dot{\theta}^2 - Mg(R-r)\cos\theta$$

da cui

$$(R-r)\dot{\theta}^2 = (R-r)\dot{\theta}_0^2 - \frac{10}{7}g\left(1-\cos\theta\right)$$

e sostituendo nella (6.32.1) troviamo

$$(R-r)\dot{\theta}_0^2 \geq g\left(\frac{10}{7} - \frac{17}{7}\cos\theta\right)$$

Il caso peggiore è $\theta = \pi$, quindi deve essere

$$\left|\dot{\theta}_0\right| \geq \sqrt{\frac{27}{7}\frac{g}{(R-r)}}$$

Domanda 3

La posizione di equilibrio stabile è $\theta = 0$. Sviluppando l'energia al secondo ordine troviamo a meno di una costante

$$E = \frac{1}{2}\frac{7}{5}M(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Mg(R-r)\theta^2 + O\left(\theta^4\right)$$

quindi la frequenza delle piccole oscillazioni è

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$