PROBLEMA 6.34

Trottola "bloccata" nel piano ⋆⋆

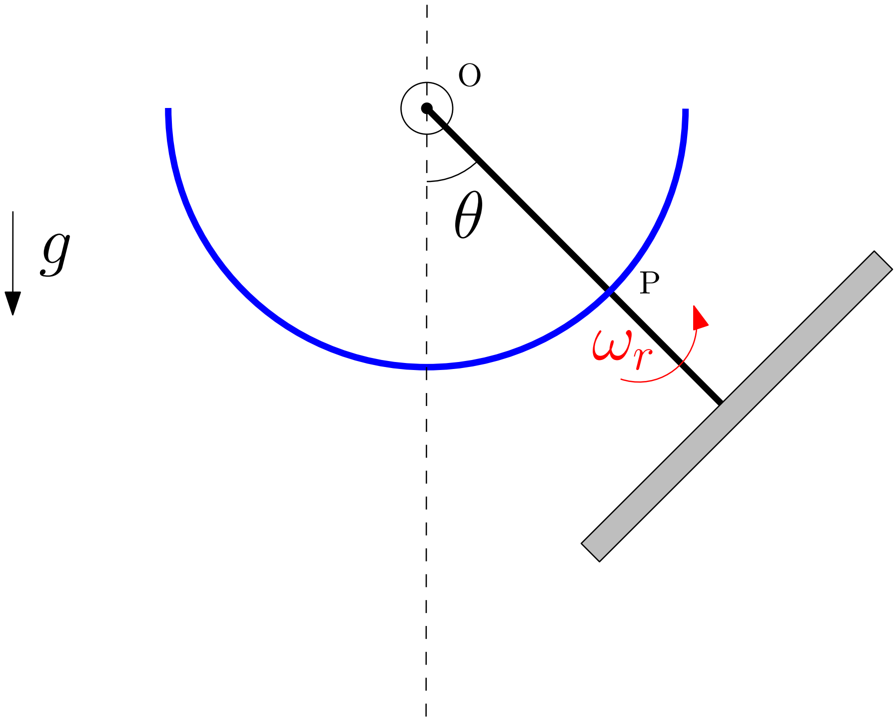

Figura 6.28.: Il sistema considerato nel problema visto in sezione rispetto al piano nel quale l'asse è vincolato. La ruota è in grigio, la guida che vincola l'asse in blu.

Una ruota di bicicletta può ruotare liberamente attorno ad un'asta. L'asta a sua volta è fissata come in Figura 6.28 ad un suo estremo nel punto O e può ruotare liberamente attorno ad esso. Per fare in modo che l'asta rimanga in un piano fissato si aggiunge una guida liscia circolare (in blu in Figura 6.28) e si vincola l'asse a rimanere aderente ad essa. Per gli scopi del problema si può indicare con I_1 il momento di inerzia del corpo rigido lungo l'asse delll'asta, con I_2 quello in una direzione perpendicolare ad essa, in entrambi i casi rispetto al punto O, con m la massa totale e con d la distanza del centro di massa da O.

Supponendo di porre in rotazione attorno all'asse la ruota con velocità angolare ω_ρ, e di lasciare libero il sistema da un angolo iniziale $\theta = \theta_0$, discutere il moto successivo scrivendo le equazioni del moto. In particolare, come si muove il sistema se $\omega_\rho = 0$? Cambia qualcosa se $\omega_\rho \neq 0$?

Soluzione

Utilizziamo coordinate cilindriche per descrivere la posizione del centro di massa del sistema

$$\vec{r}_{CM} = d\hat{e}_\rho$$

Il vettore velocità angolare ha componenti non nulle solo lungo le direzioni $\hat{e}_\rho$ e $\hat{e}_z$, quindi

$$\vec{\omega} = \omega_\rho \hat{e}_\rho + \omega_z \hat{e}_z$$

Notiamo che ω_ρ descrive la rotazione attorno all’asse, e ω_z la rotazione (oscillazione) dell’asse attorno ad O. Per ragioni di simmetria gli assi principali del corpo rigido sono chiaramente lungo l’asta e perpendicolari ad essa, quindi

$$\vec{L} = I_1 \omega_\rho \hat{e}_\rho + I_2 \omega_z \hat{e}_z$$

Per quanto riguarda i momenti, avremo quello della forza di gravità e il momento della reazione vincolare della guida

$$\vec{M} = -mgd \sin\theta \hat{e}_z + M_R \hat{e}_\theta$$

Scriviamo adesso l’equazione del moto $d\vec{L}/dt = \vec{M}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= I_1 \dot{\omega}_\rho \hat{e}_\rho + I_1 \omega_\rho \dot{\hat{e}}_\rho + I_2 \dot{\omega}_z \hat{e}_z + I_2 \omega_z \dot{\hat{e}}_z \\
&= I_1 \dot{\omega}_\rho \hat{e}_\rho + I_1 \omega_\rho \dot{\theta} \hat{e}_\theta + I_2 \dot{\omega}_z \hat{e}_z \\
&= I_1 \dot{\omega}_\rho \hat{e}_\rho + I_1 \omega_\rho \dot{\theta} \hat{e}_\theta + I_2 \ddot{\theta} \hat{e}_z
\end{aligned}$$

dove si è usato $\dot{\hat{e}}_z = 0$ e $\omega_z = \dot{\theta}$. L’equazione cardinale diventa

$$I_1 \dot{\omega}_\rho \hat{e}_\rho + I_1 \omega_\rho \dot{\theta} \hat{e}_\theta + I_2 \ddot{\theta} \hat{e}_z = -mgd \sin\theta \hat{e}_z + M_R \hat{e}_\theta$$

da cui

$$\begin{aligned}
I_1 \dot{\omega}_\rho &= 0 \\
I_1 \omega_\rho \dot{\theta} &= M_R \\
I_2 \ddot{\theta} &= -mgd \sin\theta
\end{aligned}$$

La prima equazione ci dice che ω_ρ è costante. In particolare se $\omega_\rho = 0$ le altre due si riducono a

$$\begin{aligned}
M_R &= 0 \\
I_2 \ddot{\theta} &= -mgd \sin\theta
\end{aligned}$$

quindi il sistema oscilla come un pendolo, e la guida non esercita nessuna reazione vincolare. Nel caso generale vediamo che l’equazione del moto per θ non cambia, quindi il moto sarà ancora una volta quello di un pendolo. Ma questa volta la guida eserciterà sul sistema una reazione, equivalente al momento

$$M_R = I_1 \omega_\rho \dot{\theta}$$

e questo significa che in assenza di essa il moto non resterebbe confinato nel piano. In effetti avremmo una trottola con un punto fisso, problema analizzato negli Esercizi 6.26 e 6.35.