PROBLEMA 6.35

Trottola simmetrica: discussione delle soluzioni ⋆⋆⋆

Nell'Esercizio 6.26 l'energia E e la componente verticale L_z del momento angolare di una trottola simmetrica fissata ad un estremo, entrambe quantità costanti, sono state scritte nella forma

$$\begin{aligned} E &= \frac{I_2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{L_r^2}{2I_1} + \frac{1}{2I_2}\left(\frac{L_r\cos\theta - L_z}{\sin\theta}\right)^2 + Mgd\cos\theta \\ L_z &= L_r\cos\theta + I_2\dot{\phi}\sin^2\theta \end{aligned}$$

dove L_r è la componente del monento angolare lungo l'asse della trottola, anche esso costante. In questo esercizio si studierà qualitativamente il moto della trottola al variare delle condizioni iniziali.

Soluzione

Conviene scrivere l'equazione che definisce l'energia nella forma

$$\frac{I_2}{2}\dot{\theta}^2\sin^2\theta = \left(E - \frac{L_r^2}{2I_1}\right)\sin^2\theta - \frac{1}{2I_2}\left(L_r\cos\theta - L_z\right)^2 - Mgd\cos\theta\sin^2\theta \tag{6.35.1}$$

da cui segue direttamente che il moto sarà possibile solo nelle regioni in cui il secondo membro è positivo. Avremo quindi la condizione

$$\left[\left(\frac{2I_2E}{L_r^2} - \frac{I_2}{I_1}\right) - \frac{2I_2Mgd}{L_r^2}\cos\theta\right]\left(1-\cos^2\theta\right) - \left(\cos\theta - \frac{L_z}{L_r}\right)^2 \geq 0 \tag{6.35.2}$$

ed inoltre

$$I_2\dot{\phi}(1-\cos^2\theta) = L_z - L_r\cos\theta \tag{6.35.3}$$

In termini di $x = \cos\theta$ il membro destro dell'Equazione (6.35.2) è un polinomio di terzo grado

$$P(x) = (\alpha - \beta x)\left(1-x^2\right) - (x-\gamma)^2$$

dove abbiamo posto

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{2I_2E}{L_r^2} - \frac{I_2}{I_1}\right) \\ \beta &= \frac{2I_2Mgd}{L_r^2} \\ \gamma &= \frac{L_z}{L_r} \end{aligned}$$

I valori agli estremi sono negativi o nulli,

$$P(\pm 1) = -(\gamma \mp 1)^2$$

Questo significa che la trottola potrà raggiungere la posizione verticale solo nei due casi $L_z = L_r$ (sarà possibile $\theta = 0$) o $L_z = -L_r$ (sarà possibile $\theta = \pi$). Notiamo che

$$I_2(1-x^2)\dot{\phi} = L_z - L_r x$$

e quindi il segno di $\dot{\phi}$ (la velocità di precessione) potrà cambiare, e sarà in ogni istante lo stesso di $L_z - L_r x$.

In termini delle condizioni iniziali abbiamo adesso

$$\begin{aligned} E &= \frac{I_2}{2}\dot{\theta}_0^2 + \frac{L_r^2}{2I_1} + \frac{1}{2}I_2\dot{\phi}_0^2 \sin^2\theta_0 + Mgd\cos\theta_0 \\ L_z &= L_r\cos\theta_0 + I_2\dot{\phi}_0\sin^2\theta_0 \end{aligned}$$

e quindi (notare che la velocità del centro di massa della trottola è data da $v_{cm}^2 = d^2\left(\dot{\theta}_0^2 + \dot{\phi}_0^2\sin^2\theta_0\right)$)

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{I_2^2}{L_r^2}\left(\dot{\theta}_0^2 + \dot{\phi}_0^2\sin^2\theta_0\right) + \frac{2MgdI_2}{L_r^2}\cos\theta_0 \\ &= \frac{I_2^2}{d^2L_r^2}v_{cm,0}^2 + \beta\cos\theta_0 \\ \beta &= \frac{2I_2Mgd}{L_r^2} \\ \gamma &= \cos\theta_0 + \frac{I_2}{L_r}\dot{\phi}_0\sin^2\theta_0 \end{aligned}$$

inoltre

$$I_2\dot{\phi}\sin^2\theta = L_r\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right) + I_2\dot{\phi}_0\sin^2\theta_0$$

Studiamo alcuni casi particolari. (.....................)